

Maxwell's Equation

J.C.Maxwell

1864

概要 1864 年 (元治元年、日本の江戸時代後期)、J.C.Maxwell (1831-1879) は後世 Maxwell 方程式と呼ばれる方程式を提唱した。それより 20 年ほど前に、アンペール (Ampere) やファラデー (Faraday) らによってアンペールの法則およびファラデーの電磁誘導の法則が既に発見されていた。アンペールの法則は導体に流した電流によって磁界が発生するしくみ、ファラデーの法則は変化する磁界によって導体に電流が発生するしくみを数学的に記述したものである。ところが、この二つの法則だけでは電気と磁気との間を正確に関係づけることができなかった。そこで、Maxwell は誘電体中 (空気も誘電体の一種) の電荷の動きを『変位電流』という考え方で説明し、これを用いて 4 つの Maxwell 方程式を導いた。

1 我輩がマックスウェルである



(a) 側面図



(b) 正面図

図 1: James Clerk Maxwell (1831-1879)

磁率である。マックスウェルの方程式は電磁界の解析や計算の基礎となる重要な式であり、電磁気学には大変重要な式である [2]。

私 (図 2) のおかげでこのような美しい式になったのだ。

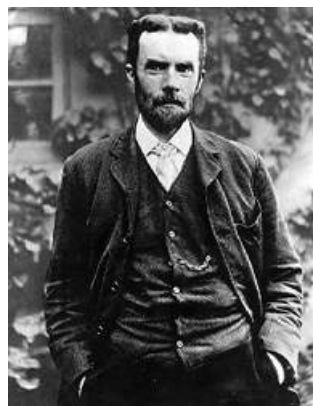


図 2: Oliver Heaviside (1850 - 1925)

2 マックスウェルの方程式

マックスウェルの方程式は、

$$\nabla \times \mathbf{H} = \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mathbf{J} \quad (1a)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \quad (1b)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad (1c)$$

$$\nabla \cdot \mu \mathbf{B} = 0 \quad (1d)$$

と表される [1]。ただし媒質中で $\mathbf{E}$ は電界ベクトル、 $\mathbf{H}$ は磁界ベクトル、 $\mathbf{J}$ は電流密度、 $\mathbf{D}$ は電束密度、 $\mathbf{B}$ は磁束密度、 ρ は空間電荷、 ε は誘電率、 μ は透

Maxwell はこの式より、

- Maxwell 方程式より波動方程式が導かれる。すなわち電界と磁界は波動として伝わる。
- 波動方程式より、電界と磁界の伝搬速度は光速度と等しいこと (当時は『ほぼ』等しかった) より、光の物理学的な正体は電気磁気の波動と推定される。

という事柄を実験によるヒントもなしにすべて推論

で行った。この方程式が無かったら、電気通信の発展も 100 年遅れたかも知れないとまで言われている。

3 ベクトル波動方程式

前説で述べたマックスウェルの電磁界基礎方程式 (1) は電界及び磁界に関する連立微分方程式である。これらをもとに電界のみの未知関数とする方程式及び磁界のみの未知関数とする方程式を導く。マックスウェルの方程式 (1a) において、強制電流源 J_0 を導入すると電流 J を

$$J = J_0 + \sigma E \quad (2)$$

と書くことができる。マックスウェルの方程式 (1a) に上式を代入すると

$$\nabla \times H - \varepsilon \frac{\partial E}{\partial t} - \sigma E = J_0 \quad (3)$$

が得られる。

電界と磁界を分けて、それぞれについて波動方程式を導出する。

式 (1b) の両辺について回転をとると

$$\nabla \times (\nabla \times E + \mu \frac{\partial H}{\partial t}) = 0 \quad (4)$$

すなわち

$$\nabla \times \nabla \times E + \mu \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times H) = 0 \quad (5)$$

である。 $\nabla \times H$ の代わりに式 (3) を用いると

$$\nabla \times \nabla \times E + \mu \frac{\partial}{\partial t} (\varepsilon \frac{\partial E}{\partial t} + \sigma E + J_0) = 0 \quad (6)$$

となり、

$$\nabla \times \nabla \times E + \mu \varepsilon \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} + \mu \sigma \frac{\partial E}{\partial t} = -\mu \frac{\partial J_0}{\partial t} \quad (7)$$

が得られる。同様に、式 (1a) 回転をとると

$$\nabla \times \nabla \times H + \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times E) - \sigma \nabla \times E = \nabla \times J_0 \quad (8)$$

であり、式 (1b) を代入すると、

$$\nabla \times \nabla \times H + \mu \varepsilon \frac{\partial^2 H}{\partial t^2} + \mu \sigma \frac{\partial H}{\partial t} = \nabla \times J_0 \quad (9)$$

が得られる。式 (7) は電界のみを未知関数とする微分方程式であり、式 (9) は磁界のみを未知関数とする微分方程式である。

ベクトル公式

$$\nabla \times \nabla \times A = \nabla \nabla \cdot A - \nabla \cdot \nabla A$$

の関係をを用いると式 (7) は

$$\nabla \nabla \cdot E - \nabla \cdot \nabla E + \mu \varepsilon \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} + \mu \sigma \frac{\partial E}{\partial t} = -\mu \frac{\partial J_0}{\partial t} \quad (10)$$

となる。領域は等方媒質であると仮定すると

$$\nabla \cdot E = \frac{\rho}{\varepsilon}$$

であり、式 (10) は上式を用いて、

$$\nabla \cdot \nabla E - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} - \mu \sigma \frac{\partial E}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon} \nabla \rho + \mu \frac{\partial J_0}{\partial t} \quad (11)$$

となる。同様にして磁界 H に対し

$$\nabla \cdot \nabla H - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 H}{\partial t^2} - \mu \sigma \frac{\partial H}{\partial t} = -\nabla \times J_0 \quad (12)$$

が得られる。

式 (11)(12) の右辺は微分方程式の強制項であり、それは電界や磁界を発生させる源に対応する。右辺から生じる界と領域から生じる界の和が求める一般界である。

電界、磁界が時間的に $e^{j\omega t}$ で変わると仮定すると、直角座標系では $\nabla \cdot \nabla A = \nabla^2 A$ であるから、式 (11)(12) は

$$\begin{aligned} \nabla^2 E + k^2 E &= j\omega \mu J_0 + \frac{1}{\varepsilon} \nabla \rho \\ \nabla^2 H + k^2 H &= -\nabla \times J_0 \end{aligned} \quad (13)$$

となり、ヘルムホルツの方程式と呼ばれる。ただし、 $k^2 = \omega^2 \mu \varepsilon - j\omega \mu \rho$ である。波源の無い点であれば式 (13) の強制項は 0 であり、

$$\begin{aligned} \nabla^2 E + k^2 E &= 0 \\ \nabla^2 H + k^2 H &= 0 \end{aligned} \quad (14)$$

と書かれる。

4 電磁波の周波数と波長

一般に電磁波は、以下の表のように自由空間中で伝搬したときの波長によって分類されている。これ以外で、明確な定義はないが、1GHz-30GHz の周波数の電磁波をマイクロ波と呼ぶ。マイクロ波は更に次のように 6 つのバンドに分類され呼ばれる。

また電波法 (第二条) では、サブミリ波の上限である 3THz(3000GHz) までは『電波』として扱っている。これ以上は分類上光の領域であり、

1. 3THz ~ 10THz (波長 0.1mm ~ 30 μ m) が遠赤外線、
2. 10THz ~ 100THz (30 μ m ~ 3 μ m) 付近が赤外線、

表 1: 電磁波の分類

周波数範囲	波長	呼称	主な用途
3kHz-30kHz	100km-10km	VLF(超長波)	オメガ, 海中通信
30kHz-300kHz	10km-1km	LF(長波)	JJY(40kHz), ロラン C, デッカ, 船舶無線
300kHz-3MHz	1km-100m	MF(中波)	中波放送
3MHz-30MHz	100m-10m	HF(短波)	短波放送
30MHz-300MHz	10m-1m	VHF(超短波)	FM,TV 放送, コードレス電話
300MHz-3GHz	1m-10cm	UHF(極超短波)	TV 放送, 携帯電話
3GHz-30GHz	10cm-1cm	SHF(センチ波)	衛星放送,ETC, 次世代携帯電話
30GHz-300GHz	1cm-1mm	EHF(ミリ波)	ITS, ミリ波通信
300GHz-3THz	1mm-0.1mm	(サブミリ波)	

表 2: マイクロ波の分類

周波数範囲	バンド名
1GHz-2GHz	L
2GHz-4GHz	S
4GHz-8GHz	C
8GHz-12.4GHz	X
12.4GHz-18GHz	Ku
18GHz-26.5GHz	Ka



図 3: Marches Guglielmo Marconi (1874 - 1937)

- 3. 100THz ~ 3900THz ($3\mu\text{m} \sim 0.77\mu\text{m}$) 付近が近赤外線、
- 4. 3900THz ~ 7890THz($0.77\mu\text{m} \sim 0.38\mu\text{m}$) が可視光線、

それ以上の周波数では、紫外線、真空紫外線、X 線、 γ 線の順に周波数が高くなって行く。

また 2.4GHz を中心とする周波数帯は特に ISM 周波数と呼ばれ、医療用、電子レンジ、無線 LAN などの利用に割り当てられている。



図 4: Aleksandr Stepanovich Popov (1859 - 1906)

5 無線電信の父

マルコーニ (図 3) は無線電信の父と呼ばれ、無線通信実験を世界で最初に行ったと言われている。1897 年、マルコーニ無線株式会社が設立され、本格的な実用化に乗り出した。1899 年にドーヴァ海峡間 (150Km)、1901 年にイングランド南部 ~ アイルランド (360Km)、同年 12 月には大西洋横断の 3,200(Km) 通信に成功した。1912 年に氷山と衝突して沈没したタイタニック号にもマルコーニ社の無線機が搭載されいたが、遭難情報が有効に伝わらず、多くの犠牲者を出す結果となった。

1894 年、ポポフ (図 4) はマルコーニと時を同じくして無線電信の実現に着手し、火花式送信機とコヒラー検波の受信機を作り実験を開始した。自らの雷の研究から、無線機に高いアンテナをつけ、同時に無線機にアースをつけることを着想した。無線機に高いアンテナをつけると電波の到達距離が飛躍的に伸びることを発見した。さらにタワーなどを立てアンテナを大きく高く工夫することによって、その後の通信距離は次々と伸びていき、こうしてアンテナとアースによって実用無線通信の可能性が高まった。彼は、これに自信を得て無線機に改良を加え、翌年の 1895 年 5 月 7 日には、世界最初の無線通信の

公開実験に成功した。その成果は、ロシアで開かれた物理・化学学会で発表された。これはイタリアのマルコニー（マルコニーの無線実験の成功は、1895年9月）に先駆けての業績だった。今から100年以上前のできごとである。どちらが本当の無線電信の父かな？

参考文献

- [1] J.C.Maxwell, A treatise on electricity & magnetism, vol. I, II, Dover
- [2] John D.Kraus, ANTENNAS, McGraw-Hill, 1988.