

FDTD 法入門

-Edition 2017-

通信工学研究室

★ MEMO ★

はじめに

1966 年、K. Yee は独自のメッシュ構造を用いた差分法による Maxwell の方程式を解く FDTD 法 (Finite Difference Time Domain method:有限差分時間領域法) を考案し [1]、A. Taflov らがそれらを発展させた [2]。

近年のコンピュータ技術の発展により、計算速度とメモリ容量が飛躍的に向上した。その結果、パーソナルコンピュータにおいても、3GHz 以上の CPU クロック周波数と 16GB 以上のメモリ容量の搭載が可能になった。高価なワークステーションに頼らず、パーソナルコンピュータを用いても FDTD 法を適用した電磁界計算で十分な精度で解を求めることができるようになった。安価なシステムで計算速度とメモリ容量を持つようになり、さらに FDTD 法をベースとするシミュレータが市販されるようになり、FDTD 法が電磁界解析の有効な手法として利用されるようになった。FDTD 法の提案当初は、吸収境界を効果的に与える手法が確立されていなかったため、開放型の領域の解析が困難であった。しかし、1994 年、J. P. Berenger によって PML (Perfectly Matched Layer) が発表 [3] され、FDTD 法が開放構造の解析対象にも適用されるようになって、その後大きく発展した。

FDTD 法は、その汎用性に大きな特徴がある。解析対象物の構造に関わらず、適切なメッシュ構造でモデル化することができれば、容易に解析可能となる。これは、解析対象の構造毎に積分方程式を定式化するモーメント法などのスペクトル領域における解法と異なり、事実上大変優位な点である。また、時間領域の計算結果のフーリエ変換を行えば、広帯域にわたって周波数特性が得られる。すなわち、パルス波形を励振源としてその応答を求めフーリエ変換によって広帯域の周波数特性を容易に得ることができる。このパルス波形としては、一般的にガウス分布型の周波数特性を有するガウシアンパルスが用いられる。また、解析領域をメッシュ構造にすることで、そのメッシュ毎に電界磁界の各成分を時間領域あるいはフーリエ変換により周波数領域でも求めることができる。コンピュータグラフィック技術を利用すれば、時間領域で求めた各メッシュの電磁界の成分は、ダイナミックな可視化により電磁界の振るまいが直感的に容易に理解することができる。また、周波数領域の電磁界はその振幅分布や位相分布を空間的に把握することが可能になり、解析対象物の動作原理や電磁界の振る舞い等が精密に把握できるため、研究開発の促進に多に寄与する。

アンテナの解析においては、その指向性、利得や入力インピーダンス特性が主な解析項目である。マイクロストリップアンテナの給電方法を大きく 2 通りに分けることができる。マイクロストリップ線路で給電する方法と接地板の裏面よりプローブで給電する方法である [4]。この給電方法の違いによって FDTD 法では、入力インピーダンスを求める手法が異なる。マイクロストリップ線路で給電されたアンテナの入力インピーダンスを求める場合には、マイクロストリップ線路上の適当な位置に観測面を設定し、その観測面における入射波と反射波の比より求める [4, 5, 6, 7]。一方、プローブで給電する場合は、給電素子と接地板とのギャップの垂直電界に強制電流源を加えて、そのギャップにおける電界と磁界の積分より求めた電圧と電流より入力インピーダンスを求める [8, 9, 10]。この手法は、他にモノポールアンテナやダイポールアンテナの入力インピーダンスを求める場合も同じである。

FDTD 法では有限の解析領域しか計算できないため、アンテナの放射パターンなど遠方界における電磁界特性を直接求めることはできない。しかし、FDTD シミュレーションで得られた近傍電磁界を適切な方法を用いて遠方界へ変換すれば、放射パターンなどの諸特性を求めることが可能である。FDTD 法における遠方界を解析するための最も一般的な方法は、解析領域の少し内側 (通常 3 ~ 4 セル) に仮想のボックスを定義し、このボックスの表面における電磁界成分に対応する等価電流・磁流密度を求め、それらより遠方界の電磁界成分や放射強度を計算する手法 [7, 11] である。

FDTD 法においては、アンテナのモデル化はアンテナの媒質定数や境界条件を形状に対応する電磁界成分にその条件を与えるだけでよい。そのため、複雑な構造のアンテナでもモデル化は容易に行える。そのため、有限地板を有するアンテナやアレイアンテナの解析においては、特別な手法を用いることなくモデル化できるため、容易にその特性を計算できる。また、そのモデル化の容易性により汎用性に富むプログラムが構築できるため、1 つのプログラムで多種多様なアンテナ特性の計算が可能となる。

このテキストでは、第 1 章で FDTD 法の基本概念と定式化、第 2 章で吸収境界条件について説明してる。第 3 章でフーリエ解析手法について説明し、FDTD 法で得られた時間領域の計算値から周波数領域への変換について示している。第 4 章では、マイクロ波回路やアンテナへの実際の適応について詳しく示している。

目次

第 1 章	基本概念と定式化	1
1.1	マクスウェルの方程式	1
1.2	Yee アルゴリズム	5
1.3	定式化	7
1.4	物体のモデル化	17
1.5	入射波源	18
1.6	計算上の条件	20
1.7	解析対象が対称形状の場合の計算	20
第 2 章	吸収境界条件	23
2.1	Mur の吸収境界条件	23
2.2	PML 吸収境界条件	28
第 3 章	フーリエ解析	43
3.1	フーリエ級数	43
3.2	複素形式	43
3.3	フーリエ変換	44
3.4	離散フーリエ変換 (DFT)	45
3.5	FDTD 法への適用	49
第 4 章	マイクロ波回路とアンテナ解析への応用	51
4.1	マイクロストリップ線路の解析	51
4.2	マイクロ波回路の散乱特性	54
4.3	アンテナの解析	55
4.4	遠方界	57
4.5	電流分布の計算	60
4.6	集中定数素子	61
4.7	マイクロストリップアンテナへの適用	67
4.8	マイクロストリップアンテナの解析例	77
参考文献		85
付 録 A	デルタ関数	87

★ MEMO ★

第1章 基本概念と定式化

1.1 マクスウェルの方程式

1.1.1 マクスウェルの基礎方程式

アンペール (Ampère) の周回積分の法則は、線状電流 I の流れている回りに閉路 C を選ぶ時、電流 I によって生じる磁界 H を閉路 C に沿って周回積分を行った値は、電流の値 I に等しいという物である。

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I \quad (1.1)$$

さらに、電流が線状ではなく有限の断面を持って存在する場合を考える。電流の単位面積あたりの電流密度を $\mathbf{J}$ で表す時、この電流と交わる法線ベクトル $\mathbf{n}$ をもつ断面 S を考え、図 1.1 のように断面の周囲を閉路 C とする。断面 S 内すべての電流は $\mathbf{J} \cdot \mathbf{n}$ を S で面積分することで求められる。これを式 (1.1) の右辺と置き換えればアンペールの周回積分の法則の積分表示が得られる。

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} dS \quad (1.2)$$

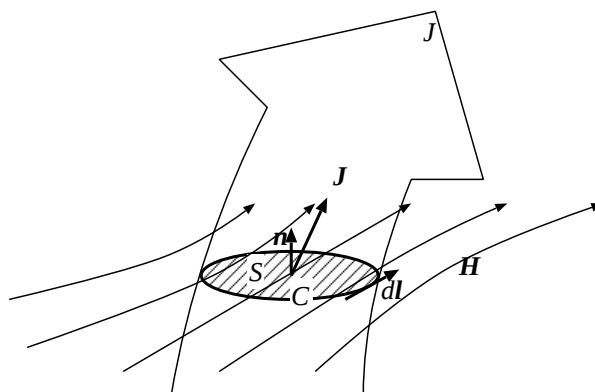


図 1.1: アンペールの周回積分の法則

また、電束密度 $\mathbf{D}$ の時間変化の割合を変位電流とよび、変位電流もアンペールの法則の電流と同じ磁界をその周囲につくるものとして、式 (1.2) の右辺に変位電流の項を加えアンペールの周回積分の法則は次式のよう拡張される。

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} dS + \frac{\partial}{\partial t} \int_S \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} dS \quad (1.3)$$

ファラデー (Faraday) の法則は、図 1.2 に示す閉路 C と鎖交している磁束密度 $\mathbf{B}$ が変化するとき、その時間変化の減少の割合に等しい起電力が閉路 C に発生することを表している。閉路 C で囲まれた領域を S とし、

その法線ベクトルを n として、その積分表示式は次式 (1.4) で与えられる。

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS \quad (1.4)$$

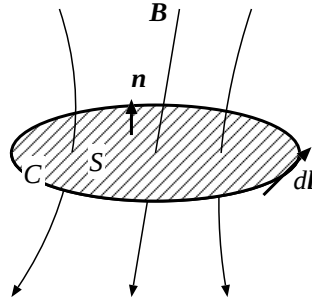


図 1.2: ファラデーの法則

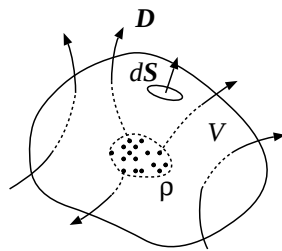
ガウス (Gauss) の法則は、図 1.3(a) に示すように、電束密度 D の閉曲面 S の面積分と、その閉曲面 S に囲まれた体積 V に存在する電荷密度 ρ の体積分を与えるガウスの積分法則

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \int_V \rho dv \quad (1.5)$$

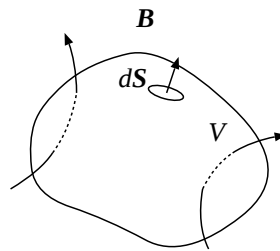
から導き出される。

磁束密度 B についても同様にして導き出される (図 1.3(b))。

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad (1.6)$$



(a) 電界ガウスの法則



(b) 磁界ガウスの法則

図 1.3: ガウスの法則

領域を等方性で均一の媒質で満たされていると仮定すると、式 (1.3)、(1.4) の二つの方程式の左辺の周回積分の項にストークスの定理を用い、さらに式 (1.5)、(1.6) にガウスの積分定理を用いることによって、マックスウェル (Maxwell) の基礎方程式の微分表示形がえられる。

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{H} \quad (1.7a)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \epsilon \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E} + \mathbf{J} \quad (1.7b)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon} \quad (1.7c)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = 0 \quad (1.7d)$$

ここで、磁荷密度 ρ_m と磁流密度 J_m の存在を仮定すると、式 (1.7a) と (1.7d) は

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{E} &= -\mu \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{H} - \mathbf{J}_m \\ \nabla \cdot \mathbf{H} &= \frac{\rho_m}{\mu}\end{aligned}$$

となる。

1.1.2 ベクトル微分演算子

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k} \quad (1.9)$$

はベクトルではなく、一つの演算を表す。これは、記号的なベクトルとみなしておけばよい。 ϕ をスカラー場とした場合に、 $\nabla \phi$ は勾配と言う重要なベクトル関数であるにかかわらず、 $\phi \nabla$ はなお演算子である。

同じように、 f が微分可能なベクトル関数であれば、 $f \cdot \nabla$ および $f \times \nabla$ はなお演算子である。ところが、 $\nabla \cdot f$ および $\nabla \times f$ は、それぞれ重要なスカラーおよびベクトル関数を表す。ある未知の場 f に発散 ($\nabla \cdot f$) や回転 ($\nabla \times f$) を施すことで、その場 f の特徴を知ることができる。

1.1.3 ベクトルの発散

f_1, f_2 および f_3 を連続な 1 次導関数をもつスカラー関数とし、ベクトル関数 $f = [f_1, f_2, f_3]$ を考える。記号的ベクトル ∇ を用いた場合の f のスカラーすなわちドット積は、

$$\begin{aligned}\nabla \cdot f &= \left(\frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k} \right) \cdot (f_1 \mathbf{i} + f_2 \mathbf{j} + f_3 \mathbf{k}) \\ &= \left(\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z} \right)\end{aligned} \quad (1.10)$$

である。ベクトル関数 f に左から ∇ を作用させると、 f はスカラー関数に変換される。このスカラー関数を、ベクトル関数 f の発散 ($\nabla \cdot f$, $\text{div } f$) とよぶ。

f の発散、 $\nabla \cdot f$ は、

$$\nabla \cdot f = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} \oint_S f \cdot dS \quad (1.11)$$

によって定義することができる。ここに、 ΔV はある閉曲面 S で限られた領域 R の体積である。

定義式 (1.11) の右辺の面積分の項は閉曲面 S を通る f の束の全流出量を表している。即ち式 (1.11) は、1 点 P における f の発散が、 S が点 P に縮むときの単位体積に対する掛値なしの流出量束の極限值であることを示している。点 P を囲む小体積が、ベクトル場 f の湧点あるいは吸点を含んでいれば、 f の束は点 P から発散するか、点 P に収束し、それは $\nabla \cdot f$ が正か負による。 $\nabla \cdot f$ は、点 P における湧出、吸収の強さのベクトルの尺度であると考えられる。

1.1.4 ベクトルの回転

f_1, f_2 および f_3 を連続な 1 次導関数をもつスカラー関数とし、ベクトル関数 $f = [f_1, f_2, f_3]$ を考える。 f の記号的ベクトル ∇ とのベクトルすなわちクロス積は、

$$\nabla \times f = \left(\frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k} \right) \times (f_1 \mathbf{i} + f_2 \mathbf{j} + f_3 \mathbf{k})$$

$$\begin{aligned}
 &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{vmatrix} \\
 &= \left(\frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right) \mathbf{k}
 \end{aligned} \tag{1.12}$$

となる。このベクトル関数を、ベクトルの関数 f の回転 ($\nabla \times f$ 、 $\text{rot } f$) とよぶ。

f の回転、 $\nabla \times f$ は、図 1.4 に示すように、

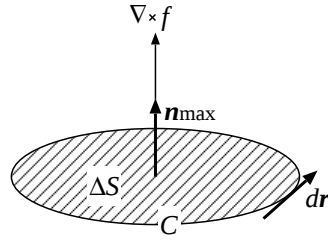


図 1.4: ベクトルの回転

$$\nabla \times f = n_{\max} \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta S} \oint_C f \cdot dr \tag{1.13}$$

によって定義することができる。ここに、 ΔS は単一閉曲線 C で限られた有界曲面であり、 $n_{\max}$ は ΔS の面の回転が

$$\frac{1}{\Delta S} \oint_C f \cdot dr \tag{1.14}$$

の最大値を与えるように ΔS に付帯させた単位法線ベクトルである。

定義式 (1.13) の右辺の線積分の項は線路 C における循環である。式 (1.13) は、1 点 P における $\nabla \times f$ の大きさが、点 P に縮小する曲線 C の単位面積に対する循環の極限值であることを示し、循環の強さである。 $\nabla \times f$ の方向は、最大の循環が発生する方向である。

1.1.5 スカラーポテンシャル、ベクトルポテンシャル

領域 R のなかで、ベクトル場 f を考える。

領域 R のいたるところで、

$$\nabla \times f = 0 \tag{1.15}$$

を満足すれば、このベクトル場を保存場または非回転場、渦なしであるという。

このとき、回転の定義式 (1.13) の線積分の項が 0 になる。すなわち、図 1.5(a) の曲線 C に沿った積分は 0 になり、図 (b) のように曲線を $C = C_1 - C_2$ とすると、 C_1 に沿った積分値と C_2 に沿った積分値は等しくなる。点 A から点 B への線積分は経路に関係なく、位置にのみ定まることになる。

このとき、ベクトル f はスカラー場 ϕ の勾配

$$f = \nabla \phi \tag{1.16}$$

で表される。スカラー場 ϕ はスカラーポテンシャルとよばれる。

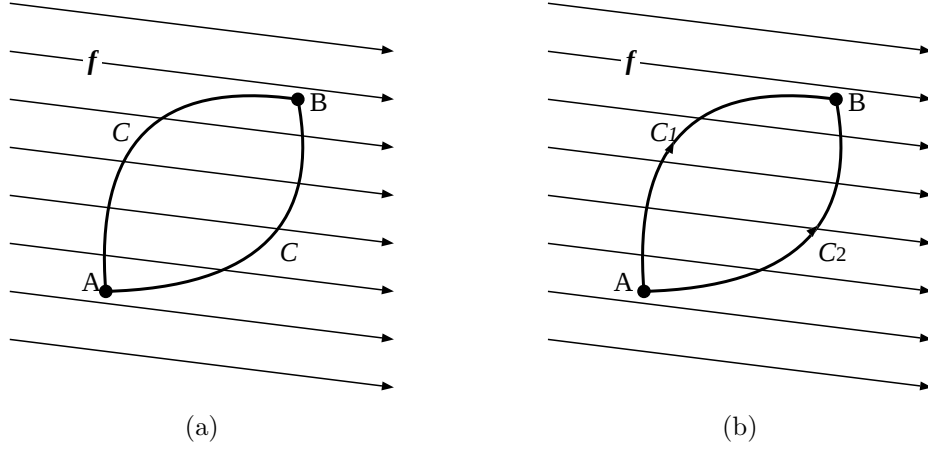


図 1.5: 保存場

一方、領域 R のいたるところで、

$$\nabla \cdot \mathbf{f} = 0 \quad (1.17)$$

を満足すれば、このベクトル場をソレノイド場または回転場、管状であるという。

1つの管状ベクトル場 $\mathbf{f}$ に対して

$$\mathbf{f} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (1.18)$$

が成り立つようなベクトル $\mathbf{A}$ が存在する。この $\mathbf{A}$ をベクトル場 $\mathbf{f}$ のベクトルポテンシャルと呼ぶ。

任意の電磁界 $\mathbf{f}$ は、定義された領域内で、回転ベクトル界と非回転ベクトル界の和として次のように表される。

$$\mathbf{f} = \nabla \times \mathbf{A} + \nabla \phi \quad (1.19)$$

1.2 Yee アルゴリズム

1.2.1 差分

FDTD 法では、マクスウェルの方程式 (1.7) を 1 次の差分公式を用いて差分化する。1 次差分には、図 1.6 に示すように、前進差分、後進差分および中心差分があるが、図から明らかのように、中心差分が最も精度の良い差分公式であり、FDTD 法では、中心差分を用いる。前進差分、後進差分は Δx のオーダー、中心差分は $(\Delta x)^2$ のオーダーの誤差である。

電磁界のある一つの成分を、 F とすると、空間および時間についての中心差分は、

$$\frac{\partial F}{\partial x} \approx \frac{F\left(x + \frac{\Delta x}{2}, y, z, t\right) - F\left(x - \frac{\Delta x}{2}, y, z, t\right)}{\Delta x} \quad (1.20a)$$

$$\frac{\partial F}{\partial t} \approx \frac{F\left(x, y, z, t + \frac{\Delta t}{2}\right) - F\left(x, y, z, t - \frac{\Delta t}{2}\right)}{\Delta t} \quad (1.20b)$$

で与えられる。

FDTD 法では、図 1.7(a) に示すように、解析領域は Yee セルと呼ばれる微小セルに分割され、時間も図 1.7(b) に示すように離散化される。このとき Δx 、 Δy 、 Δz はセルの各辺の長さであり、セルサイズと呼ばれ、また Δt は時間ステップと呼ばれる。

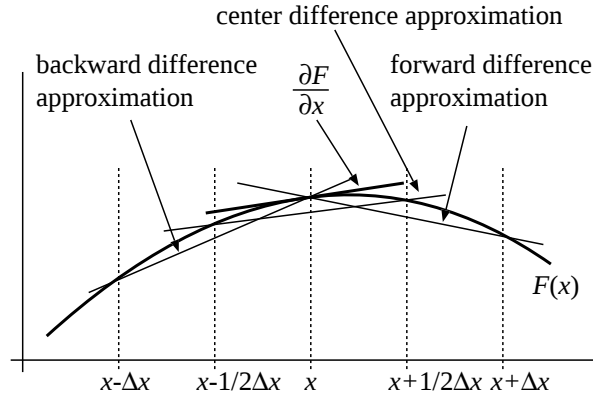
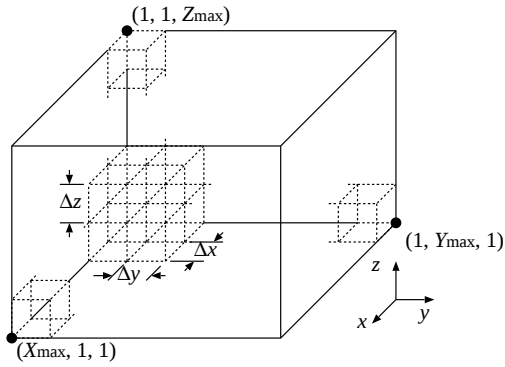
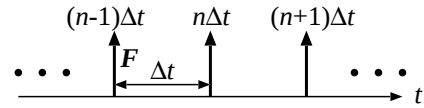


図 1.6: 1 次差分



(a) 空間領域の分割



(b) 時間領域の分割

図 1.7: 空間領域と時間領域の分割

そのため、領域内の点 (x, y, z) はセルの格子点で表され、そのセルの格子点を x 軸 i 番目、 y 軸 j 番目、 z 軸 k 番目とし、さらに時間 t を時間軸のステップ数 n で表すと、

$$(x, y, z, t) = (i\Delta x, j\Delta y, k\Delta z, n\Delta t) \quad (1.21)$$

となる。FDTD の表記法では、 Δx 、 Δy 、 Δz および Δt を省略し

$$F(x, y, z, t) \Rightarrow F^n(i, j, k) \quad (1.22)$$

と書くので、引数 i 、 j 、 k は格子点の座標に、 n は時間ステップに対応する。上式を式 (1.20) に用いると

$$\frac{\partial F}{\partial x} \approx \frac{F^n\left(i + \frac{1}{2}, j, k\right) - F^n\left(i - \frac{1}{2}, j, k\right)}{\Delta x} \quad (1.23a)$$

$$\frac{\partial F}{\partial t} \approx \frac{F^{n+\frac{1}{2}}(i, j, k) - F^{n-\frac{1}{2}}(i, j, k)}{\Delta t} \quad (1.23b)$$

と書くことができる。

1.2.2 電磁界の空間、時間配置

中心差分形式に従ってマクスウェルの方程式を差分化すると、電磁界の空間、時間の配置は、図 1.8 に示すようになる。電界は磁界の中間に、磁界は電界の中間に位置する。

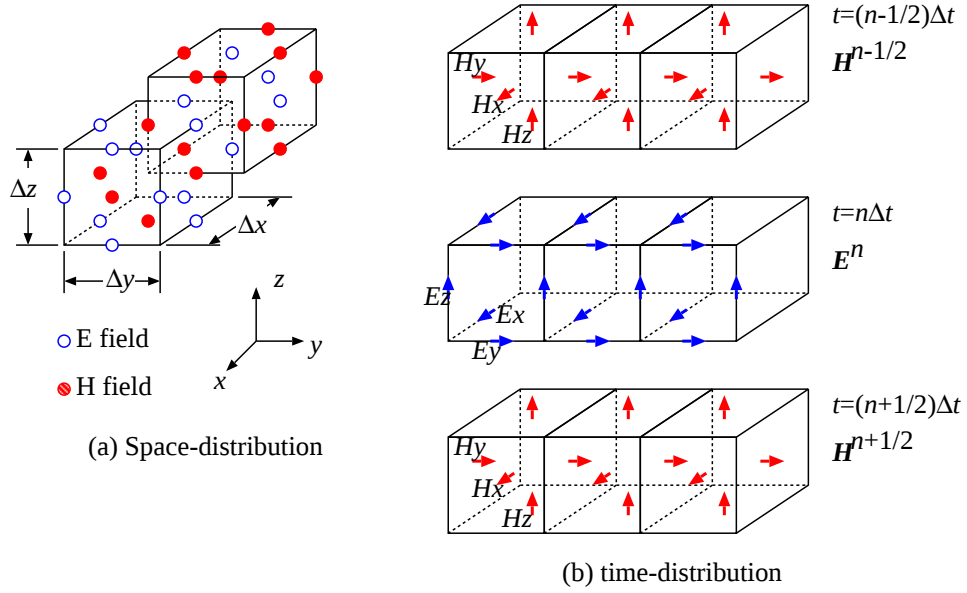


図 1.8: 電磁界の空間、時間配置

電界の各 x 、 y 、 z 成分を Yee セルの x 軸、 y 軸、 z 軸に平行な辺にそれぞれ配置すると、磁界の各 x 、 y 、 z 成分は、 $y-z$ 平面、 $z-x$ 平面、 $x-y$ 平面に配置される。また、電界を配置する時間を $n\Delta t$ 、 $(n+1)\Delta t$ 、 $(n+2)\Delta t$ 、 $\dots$ とすると、磁界は、 $(n+1/2)\Delta t$ 、 $(n+3/2)\Delta t$ 、 $(n+5/2)\Delta t$ 、 $\dots$ に配置される。すなわち、空間配置、時間配置において、電界、磁界の各成分は交互に位置され、同じ場所や時間になることはない。

1.3 定式化

マクスウェルの方程式 (式 1.7) を微分形式で x 、 y 、 z 成分に別けて展開すると、次式が得られる。

$$\begin{aligned}
 \nabla \times \mathbf{E} &= \left(\frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k} \right) \times (E_x \mathbf{i} + E_y \mathbf{j} + E_z \mathbf{k}) \\
 &= \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) \mathbf{k} \\
 &= -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \\
 &= -\mu \frac{\partial}{\partial t} (H_x \mathbf{i} + H_y \mathbf{j} + H_z \mathbf{k}) \\
 \nabla \times \mathbf{H} &= \left(\frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k} \right) \times (H_x \mathbf{i} + H_y \mathbf{j} + H_z \mathbf{k}) \\
 &= \left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) \mathbf{k} \\
 &= \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}
 \end{aligned} \tag{1.24}$$

第1章 基本概念と定式化

$$= \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} (E_x \mathbf{i} + E_y \mathbf{j} + E_z \mathbf{k}) \quad (1.25)$$

ここで、 $\mathbf{i}$ 、 $\mathbf{j}$ 、 $\mathbf{k}$ は x 、 y 、 z 軸の単位ベクトルである。

1.3.1 1次元の電磁界の定式化

1次元電磁界は、 y 軸方向に進む平面波を仮定すると、式 (1.24)、(1.25) において、 $\frac{\partial}{\partial x} = 0$ 、 $\frac{\partial}{\partial z} = 0$ より、次式で表される。

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} \mathbf{i} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \mathbf{k} = -\mu \frac{\partial}{\partial t} (H_x \mathbf{i} + H_z \mathbf{k}) \quad (1.26)$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} \mathbf{i} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \mathbf{k} = \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} (E_x \mathbf{i} + E_z \mathbf{k}) \quad (1.27)$$

各成分に分け整理すると、

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} = -\mu \frac{\partial H_x}{\partial t}, \quad -\frac{\partial H_x}{\partial y} = \varepsilon \frac{\partial E_z}{\partial t} \quad (1.28)$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial y} = \mu \frac{\partial H_z}{\partial t}, \quad \frac{\partial H_z}{\partial y} = \varepsilon \frac{\partial E_x}{\partial t} \quad (1.29)$$

となる。上式より、1次元電磁界は (E_z, H_x) と (E_x, H_z) のペアの和で表される。ここでは (E_z, H_x) のペアを考える。 (E_x, H_z) のペアは偏波の違いだけで、 (E_z, H_x) を y 軸を中心に 90 度回転すれば求まる。

図 1.9 に FDTD の式 (1.28) で表される 1次元 (E_z, H_x) 計算アルゴリズムにおける電磁界の空間と時間配置を示す。式 (1.28) の左の式は、電界 E_z の空間差分 (図中の電界 (5) と (6) の空間差分) と磁界 H_x の時間差分 (図中の磁界 (2) と (8) の時間差分) が、空間の中間地点と時間の中間時間において等しいことを示している。式 (1.28) の右の式も同様に、磁界の空間差分と電界の時間差分が等しいことを示している。

中間差分の定義式より、式 (1.28) の第 1 式の左辺の空間差分の項は、図中の電界 (5) と (6) から求まる $\frac{\partial}{\partial y} E_z$ に対応し

$$\left. \frac{\partial E_z}{\partial y} \right|_{y=j+\frac{1}{2}, t=n} = \frac{E_z^n(i, j+1, k) - E_z^n(i, j, k)}{\Delta y} \quad (1.30)$$

右辺時間差分の項は、図中の磁界 (2) と (8) から求まる $\frac{\partial}{\partial t} H_x$ に対応し

$$-\mu \left. \frac{\partial H_x}{\partial t} \right|_{y=j+\frac{1}{2}, t=n} = -\mu \frac{H_x^{n+\frac{1}{2}}(i, j+\frac{1}{2}, k) - H_x^{n-\frac{1}{2}}(i, j+\frac{1}{2}, k)}{\Delta t} \quad (1.31)$$

となる。式 (1.28) の第 1 式に従って、座標 $(y = j + \frac{1}{2}, t = n)$ で、電界の空間差分と磁界の時間差分が等しいとすると

$$\frac{E_z^n(i, j+1, k) - E_z^n(i, j, k)}{\Delta y} = -\mu \frac{H_x^{n+\frac{1}{2}}(i, j+\frac{1}{2}, k) - H_x^{n-\frac{1}{2}}(i, j+\frac{1}{2}, k)}{\Delta t} \quad (1.32)$$

となる。更に左辺を $H_x^{n+\frac{1}{2}}(i, j+\frac{1}{2}, k)$ の項のみになるように式変形を施すと、

$$H_x^{n+\frac{1}{2}}(i, j+\frac{1}{2}, k) = H_x^{n-\frac{1}{2}}(i, j+\frac{1}{2}, k) - \frac{\Delta t}{\mu \Delta y} \{E_z^n(i, j+1, k) - E_z^n(i, j, k)\} \quad (1.33)$$

が得られる。

同様に、式 (1.28) の第 2 式の左辺は (磁界 (7) と (8))、

$$-\frac{\partial}{\partial y} H_x \Big|_{y=j, t=n+\frac{1}{2}} = -\frac{H_x^{n+\frac{1}{2}}(i, j+\frac{1}{2}, k) - H_x^{n+\frac{1}{2}}(i, j-\frac{1}{2}, k)}{\Delta y} \quad (1.34)$$

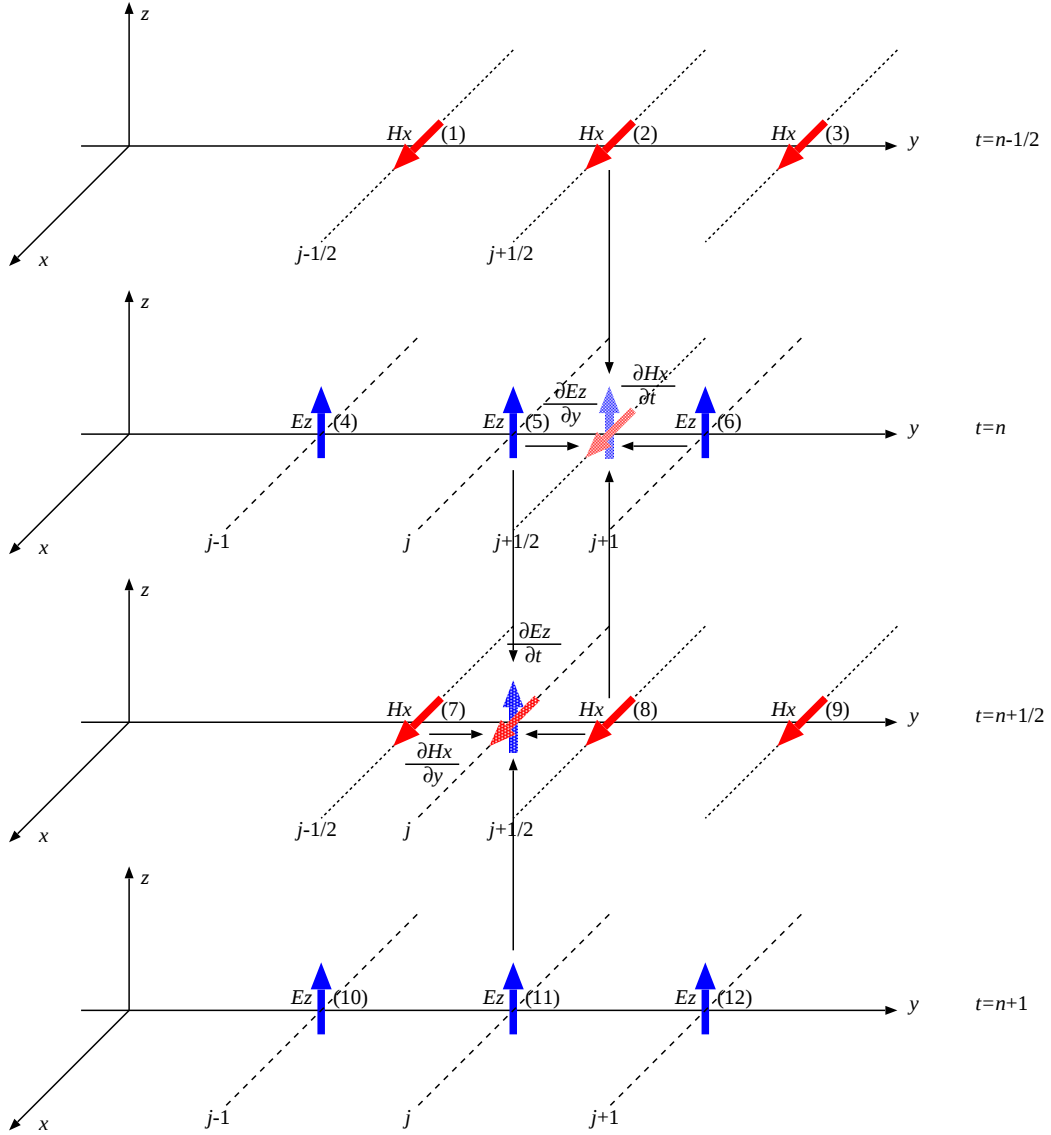


図 1.9: 1次元 FDTD 法の計算アルゴリズムにおける電磁界の空間と時間配置

右辺は (電界 (5) と (11))、

$$\varepsilon \frac{\partial}{\partial t} E_z \Big|_{y=j, t=n+\frac{1}{2}} = \varepsilon \frac{E_z^{n+1}(i, j, k) - E_z^n(i, j, k)}{\Delta t} \quad (1.35)$$

となり、式 (1.28) の第 2 式に従い、上式を等しいとすると

$$-\frac{H_x^{n+\frac{1}{2}}(i, j+\frac{1}{2}, k) - H_x^{n+\frac{1}{2}}(i, j-\frac{1}{2}, k)}{\Delta y} = \varepsilon \frac{E_z^{n+1}(i, j, k) - E_z^n(i, j, k)}{\Delta t} \quad (1.36)$$

となる。更に左辺を $E_z^{n+1}(i, j, k)$ の項のみになるように式変形を施すと、

$$E_z^{n+1}(i, j, k) = E_z^n(i, j, k) - \frac{\Delta t}{\varepsilon \Delta y} \left\{ H_x^{n+\frac{1}{2}}(i, j+\frac{1}{2}, k) - H_x^{n+\frac{1}{2}}(i, j-\frac{1}{2}, k) \right\} \quad (1.37)$$

が得られる。

図 1.10 に FDTD における 1 次元 (E_z , H_x) 電磁界の計算の流れを示す。式 (1.33) の左辺の H_x を図中の (7) の H_x に対応させると、右辺第 1 項の H_x は図中の (1) に右辺第 2 項の中カッコ内の 1 項目の E_z は (4)、中カッコ内の 2 項目の E_z は (5) に対応する。すなわち、式 (1.33) は、磁界 $H_x(7)$ が 1 ステップ前の磁界 $H_x(1)$ と半ステップ前の電界 $E_z(4)(5)$ から求まる事を示している。同じように磁界 $H_x(8)$ は磁界 $H_x(2)$ と電界 $E_z(5)(6)$ から求まる。これを、 y 軸上で繰り返す事で、 $t = n + 1/2$ 時間の磁界 H_x が得られる。

一方、式 (1.37) の左辺の E_z を図中の (11) の E_z に対応させると、式 (1.37) は、電界 $E_z(11)$ が 1 ステップ前の電界 $E_z(5)$ と半ステップ前の磁界 $H_x(7)(8)$ から求まる事を示している。同じように電界 $E_z(12)$ は電界 $E_z(6)$ と磁界 $H_x(8)(9)$ から求まる。これを、 y 軸上で繰り返す事で、 $t = n + 1$ 時間の電界 E_z が得られる。この空間ステップと時間ステップを繰り返す事で、全ての電磁界が求まる。

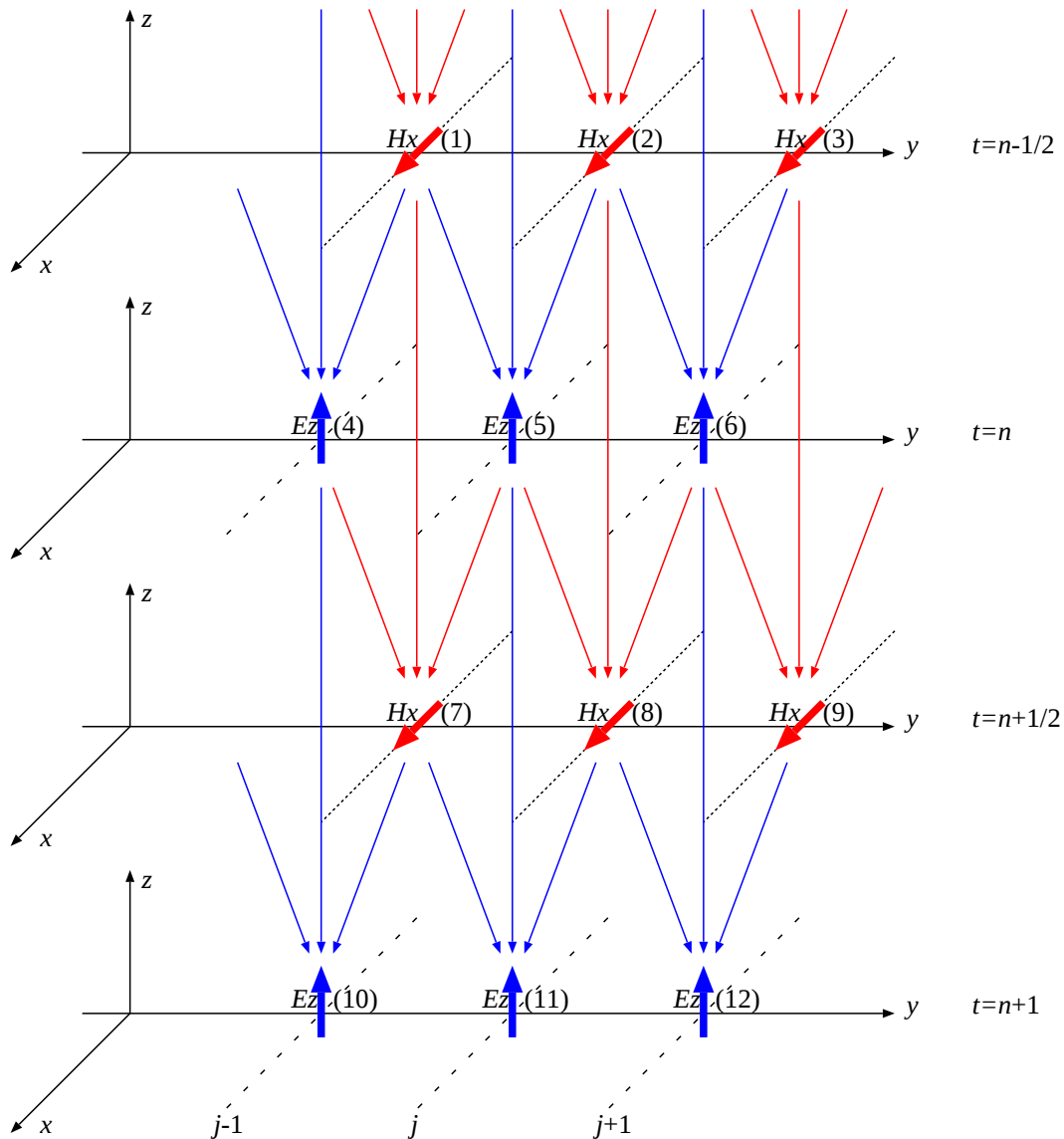


図 1.10: 1 次元 FDTD 法における電磁界の計算の流れ

1.3.2 2次元の電磁界の定式化

2次元の電磁界を x - y 平面 ($z = 0$) 上に仮定すると、電磁界は式 (1.24)、(1.25) において、 $\frac{\partial}{\partial z} = 0$ より、次式で表される。

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} \mathbf{i} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \mathbf{j} + \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) \mathbf{k} = -\mu \frac{\partial}{\partial t} (H_x \mathbf{i} + H_y \mathbf{j} + H_z \mathbf{k}) \quad (1.38)$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} \mathbf{i} - \frac{\partial H_z}{\partial x} \mathbf{j} + \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) \mathbf{k} = \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} (E_x \mathbf{i} + E_y \mathbf{j} + E_z \mathbf{k}) \quad (1.39)$$

各成分に分け整理すると、

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} = -\mu \frac{\partial}{\partial t} H_x, \quad \frac{\partial E_z}{\partial x} = \mu \frac{\partial}{\partial t} H_y, \quad \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) = \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} E_z \quad (1.40)$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} = \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} E_x, \quad -\frac{\partial H_z}{\partial x} = \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} E_y, \quad \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) = -\mu \frac{\partial}{\partial t} H_z \quad (1.41)$$

となる。上2式は、2次元電磁界が (E_z, H_x, H_y) と (E_x, E_y, H_z) のペアで構成されることを表し、それぞれ TM 波、TE 波と呼ぶ。

1.3.3 2次元 TM 波の定式化

図 1.11 に FDTD 法における2次元の TM 波 (E_z, H_x, H_y) の電磁界の空間配置を示す。中間差分の定義式

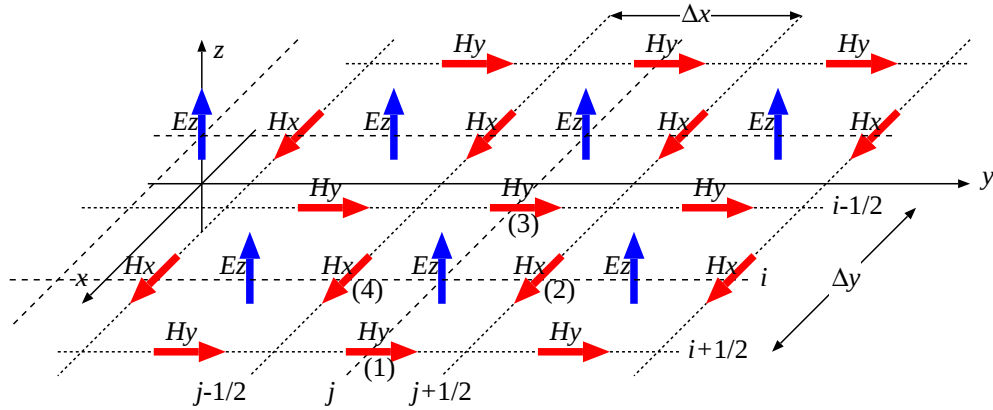


図 1.11: 2次元 TM 波の電磁界の空間配置

より、式 (1.40) は、空間配置と時間配置を考慮すると

$$\frac{E_z^n(i, j+1, k) - E_z^n(i, j, k)}{\Delta y} = -\mu \frac{H_x^{n+\frac{1}{2}}(i, j+\frac{1}{2}, k) - H_x^{n-\frac{1}{2}}(i, j+\frac{1}{2}, k)}{\Delta t} \quad (1.42)$$

$$\frac{E_z^n(i+1, j, k) - E_z^n(i, j, k)}{\Delta x} = \mu \frac{H_y^{n+\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2}, j, k) - H_y^{n-\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2}, j, k)}{\Delta t} \quad (1.43)$$

$$\begin{aligned} & \frac{H_y^{n+\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2}, j, k) - H_y^{n+\frac{1}{2}}(i-\frac{1}{2}, j, k)}{\Delta x} - \frac{H_x^{n+\frac{1}{2}}(i, j+\frac{1}{2}, k) - H_x^{n+\frac{1}{2}}(i, j-\frac{1}{2}, k)}{\Delta y} \\ &= \varepsilon \frac{E_z^{n+1}(i, j, k) - E_z^n(i, j, k)}{\Delta t} \end{aligned} \quad (1.44)$$

となる。上 3 式を整理すると、FDTD 法による 2 次元 TM 波の電磁界は次式のように求まる。

$$H_x^{n+\frac{1}{2}}(i, j + \frac{1}{2}, k) = H_x^{n-\frac{1}{2}}(i, j + \frac{1}{2}, k) - \frac{\Delta t}{\mu \Delta y} \{E_z^n(i, j + 1, k) - E_z^n(i, j, k)\} \quad (1.45)$$

$$H_y^{n+\frac{1}{2}}(i + \frac{1}{2}, j, k) = H_y^{n-\frac{1}{2}}(i + \frac{1}{2}, j, k) - \frac{\Delta t}{\mu \Delta x} \{E_z^n(i + 1, j, k) - E_z^n(i, j, k)\} \quad (1.46)$$

$$\begin{aligned} E_z^{n+1}(i, j, k) &= E_z^n(i, j, k) \\ &+ \frac{\Delta t}{\varepsilon \Delta x} \left\{ H_y^{n+\frac{1}{2}}(i + \frac{1}{2}, j, k) - H_y^{n+\frac{1}{2}}(i - \frac{1}{2}, j, k) \right\} \\ &- \frac{\Delta t}{\varepsilon \Delta y} \left\{ H_x^{n+\frac{1}{2}}(i, j + \frac{1}{2}, k) - H_x^{n+\frac{1}{2}}(i, j - \frac{1}{2}, k) \right\} \end{aligned} \quad (1.47)$$

一方、Maxwell の方程式 (1.7) を積分形式で定式化することも可能である。Maxwell の方程式 (1.7b) の左辺の磁界 H の回転 ($\nabla \times H$) を回転の定義式 (1.13) より、Yee セルにあてはめて積分形式で表すと

$$\begin{aligned} \nabla \times H &= n_{\max} \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta S} \oint_C H \cdot d\mathbf{r} \\ &\Rightarrow \frac{1}{\Delta x \Delta y} \left[\int_{j-\frac{1}{2}}^{j+\frac{1}{2}} H_y^{n+\frac{1}{2}}(i + \frac{1}{2}, j, k) dy + \int_{i+\frac{1}{2}}^{i-\frac{1}{2}} H_x^{n+\frac{1}{2}}(i, j + \frac{1}{2}, k) dx \right. \\ &\quad \left. + \int_{j+\frac{1}{2}}^{j-\frac{1}{2}} H_y^{n+\frac{1}{2}}(i - \frac{1}{2}, j, k) dy + \int_{i-\frac{1}{2}}^{i+\frac{1}{2}} H_x^{n+\frac{1}{2}}(i, j - \frac{1}{2}, k) dx \right] \\ &= \frac{1}{\Delta x \Delta y} \left[H_y^{n+\frac{1}{2}}(i + \frac{1}{2}, j, k) \Delta y - H_x^{n+\frac{1}{2}}(i, j + \frac{1}{2}, k) \Delta x \right. \\ &\quad \left. - H_y^{n+\frac{1}{2}}(i - \frac{1}{2}, j, k) \Delta y + H_x^{n+\frac{1}{2}}(i, j - \frac{1}{2}, k) \Delta x \right] \end{aligned} \quad (1.48)$$

となる。Maxwell の方程式 (1.7b) の右辺を中心差分に従い差分表現し、上式と等しいとすると

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} E_z &\Rightarrow \varepsilon \frac{1}{\Delta t} \{E_z^{n+1}(i, j, k) - E_z^n(i, j, k)\} \\ \varepsilon \frac{1}{\Delta t} \{E_z^{n+1}(i, j, k) - E_z^n(i, j, k)\} &= \frac{1}{\Delta x \Delta y} \left[\Delta y \left\{ H_y^{n+\frac{1}{2}}(i + \frac{1}{2}, j, k) - H_y^{n+\frac{1}{2}}(i - \frac{1}{2}, j, k) \right\} \right. \\ &\quad \left. - \Delta x \left\{ H_x^{n+\frac{1}{2}}(i, j + \frac{1}{2}, k) - H_x^{n+\frac{1}{2}}(i, j - \frac{1}{2}, k) \right\} \right] \end{aligned} \quad (1.49)$$

となり、式 (1.47) と一致する。

1.3.4 2 次元 TE 波の定式化

図 1.12 に FDTD 法における 2 次元の TE 波 (E_x 、 E_y 、 H_z) の電磁界の空間配置を示す。TM 波と同様に中間差分の定義式より、式 (1.41) は、空間配置と時間配置を考慮すると

$$\begin{aligned} &\frac{H_z^{n+\frac{1}{2}}(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}, k) - H_z^{n+\frac{1}{2}}(i + \frac{1}{2}, j - \frac{1}{2}, k)}{\Delta y} \\ &= \varepsilon \frac{E_x^{n+1}(i + \frac{1}{2}, j, k) - E_x^n(i + \frac{1}{2}, j, k)}{\Delta t} \\ &\quad - \frac{H_z^{n+\frac{1}{2}}(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}, k) - H_z^{n+\frac{1}{2}}(i - \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}, k)}{\Delta x} \end{aligned} \quad (1.50)$$

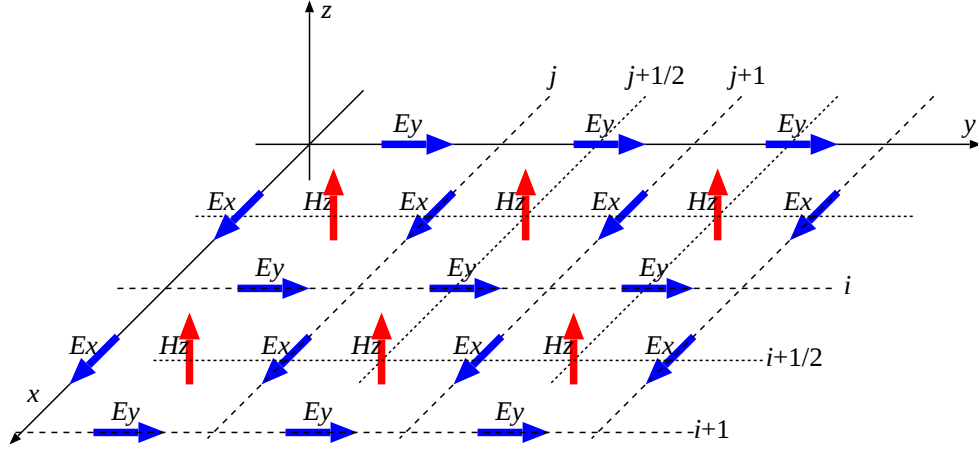


図 1.12: 2次元 TE 波の電磁界の空間配置

$$= \varepsilon \frac{E_y^{n+1}(i, j + \frac{1}{2}, k) - E_y^n(i, j + \frac{1}{2}, k)}{\Delta t} \quad (1.51)$$

$$\begin{aligned} & \frac{E_y^n(i+1, j + \frac{1}{2}, k) - E_y^n(i, j + \frac{1}{2}, k)}{\Delta x} - \frac{E_x^n(i + \frac{1}{2}, j+1, k) - E_x^n(i + \frac{1}{2}, j, k)}{\Delta y} \\ &= -\mu \frac{H_z^{n+\frac{1}{2}}(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}, k) - H_z^{n-\frac{1}{2}}(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}, k)}{\Delta t} \end{aligned} \quad (1.52)$$

となる。上3式を整理すると、FDTD 法による2次元 TM 波の電磁界は次式のように求まる。

$$\begin{aligned} E_x^{n+1}(i + \frac{1}{2}, j, k) &= E_x^n(i + \frac{1}{2}, j, k) \\ &+ \frac{\Delta t}{\varepsilon \Delta y} \left\{ H_z^{n+\frac{1}{2}}(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}, k) - H_z^{n+\frac{1}{2}}(i + \frac{1}{2}, j - \frac{1}{2}, k) \right\} \end{aligned} \quad (1.53)$$

$$\begin{aligned} E_y^{n+1}(i, j + \frac{1}{2}, k) &= E_y^n(i, j + \frac{1}{2}, k) \\ &- \frac{\Delta t}{\varepsilon \Delta x} \left\{ H_z^{n+\frac{1}{2}}(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}, k) - H_z^{n+\frac{1}{2}}(i - \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}, k) \right\} \end{aligned} \quad (1.54)$$

$$\begin{aligned} H_z^{n+\frac{1}{2}}(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}, k) &= H_z^{n-\frac{1}{2}}(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}, k) \\ &- \frac{\Delta t}{\mu \Delta x} \{ E_y^n(i+1, j, k) - E_y^n(i, j, k) \} \\ &+ \frac{\Delta t}{\mu \Delta y} \{ E_x^n(i, j+1, k) - E_x^n(i, j, k) \} \end{aligned} \quad (1.55)$$

1.3.5 3次元の電磁界の定式化

図 1.13 に FDTD 法における3次元の電磁界の空間配置を示す。式 (1.24)、(1.25) において、各成分に分解すると、

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} = \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} E_x, \quad \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} = \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} E_y, \quad \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} E_z \quad (1.56)$$

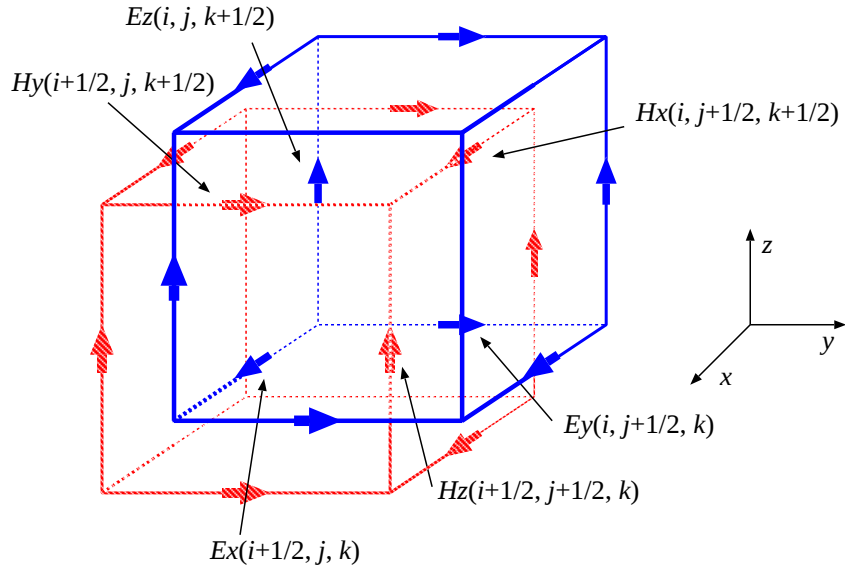


図 1.13: 3次元の電磁界の空間配置

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = -\mu \frac{\partial H_x}{\partial t}, \quad \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = -\mu \frac{\partial H_y}{\partial t}, \quad \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -\mu \frac{\partial H_z}{\partial t} \quad (1.57)$$

となる。

電界の時間微分の式 (1.56) を図 1.14 に従って整理すると、

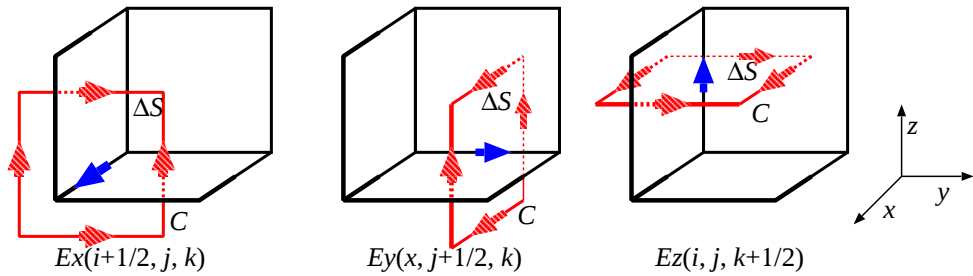


図 1.14: 3次元の電界の空間配置

$$\begin{aligned} E_x^{n+1}(i + \frac{1}{2}, j, k) &= E_x^n(i + \frac{1}{2}, j, k) \\ &+ \frac{\Delta t}{\varepsilon \Delta y} \left\{ H_z^{n+\frac{1}{2}}(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}, k) - H_z^{n+\frac{1}{2}}(i + \frac{1}{2}, j - \frac{1}{2}, k) \right\} \\ &- \frac{\Delta t}{\varepsilon \Delta z} \left\{ H_y^{n+\frac{1}{2}}(i + \frac{1}{2}, j, k + \frac{1}{2}) - H_y^{n+\frac{1}{2}}(i + \frac{1}{2}, j, k - \frac{1}{2}) \right\} \end{aligned} \quad (1.58)$$

$$\begin{aligned} E_y^{n+1}(i, j + \frac{1}{2}, k) &= E_y^n(i, j + \frac{1}{2}, k) \\ &+ \frac{\Delta t}{\varepsilon \Delta z} \left\{ H_x^{n+\frac{1}{2}}(i, j + \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}) - H_x^{n+\frac{1}{2}}(i, j + \frac{1}{2}, k - \frac{1}{2}) \right\} \end{aligned}$$

$$- \frac{\Delta t}{\varepsilon \Delta x} \left\{ H_z^{n+\frac{1}{2}}(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}, k) - H_z^{n+\frac{1}{2}}(i - \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}, k) \right\} \quad (1.59)$$

$$\begin{aligned} E_z^{n+1}(i, j, k + \frac{1}{2}) &= E_z^n(i, j, k + \frac{1}{2}) \\ &+ \frac{\Delta t}{\varepsilon \Delta x} \left\{ H_y^{n+\frac{1}{2}}(i + \frac{1}{2}, j, k + \frac{1}{2}) - H_y^{n+\frac{1}{2}}(i - \frac{1}{2}, j, k + \frac{1}{2}) \right\} \\ &- \frac{\Delta t}{\varepsilon \Delta y} \left\{ H_x^{n+\frac{1}{2}}(i, j + \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}) - H_x^{n+\frac{1}{2}}(i, j - \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}) \right\} \end{aligned} \quad (1.60)$$

となる。

磁界の時間微分の式 (1.57) を図 1.15 に従って整理すると、

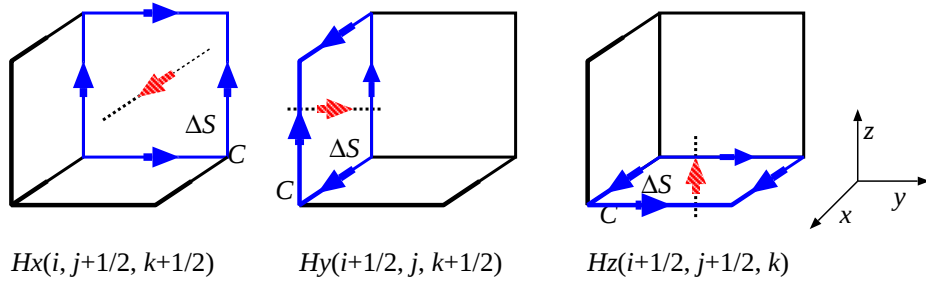


図 1.15: 3次元の磁界の空間配置

$$\begin{aligned} H_x^{n+\frac{1}{2}}(i, j + \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}) &= H_x^{n-\frac{1}{2}}(i, j + \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}) \\ &- \frac{\Delta t}{\mu \Delta y} \left\{ E_z^n(i, j + 1, k + \frac{1}{2}) - E_z^n(i, j, k + \frac{1}{2}) \right\} \\ &+ \frac{\Delta t}{\mu \Delta z} \left\{ E_y^n(i, j + \frac{1}{2}, z + 1) - E_y^n(i, j + \frac{1}{2}, k) \right\} \end{aligned} \quad (1.61)$$

$$\begin{aligned} H_y^{n+\frac{1}{2}}(i + \frac{1}{2}, j, k + \frac{1}{2}) &= H_y^{n-\frac{1}{2}}(i + \frac{1}{2}, j, k + \frac{1}{2}) \\ &- \frac{\Delta t}{\mu \Delta z} \left\{ E_x^n(i + \frac{1}{2}, j, k + 1) - E_x^n(i + \frac{1}{2}, j, k) \right\} \\ &+ \frac{\Delta t}{\mu \Delta x} \left\{ E_z^n(i + 1, j, k + \frac{1}{2}) - E_z^n(i, j, k + \frac{1}{2}) \right\} \end{aligned} \quad (1.62)$$

$$\begin{aligned} H_z^{n+\frac{1}{2}}(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}, k) &= H_z^{n-\frac{1}{2}}(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}, k) \\ &- \frac{\Delta t}{\mu \Delta x} \left\{ E_y^n(i + 1, j + \frac{1}{2}, k) - E_y^n(i, j + \frac{1}{2}, k) \right\} \\ &+ \frac{\Delta t}{\mu \Delta y} \left\{ E_x^n(i + \frac{1}{2}, j + 1, k) - E_x^n(i + \frac{1}{2}, j, k) \right\} \end{aligned} \quad (1.63)$$

となる。

また、回転 ($\nabla \times$) の定義に従って、マックスウエルの方程式 (式 (1.7)) を積分形式に展開することで定式化ができる。

$$\nabla \times \mathbf{E} = n_{\max} \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta S} \oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} \quad (1.64a)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = n_{\max} \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta S} \oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{r} \quad (1.64b)$$

ここで、 ΔS は単一閉曲線 C で限られた有界曲面であり、 $n_{\max}$ は ΔS の面の回転が最大値を与えるように ΔS に付帯させた単位法線ベクトルである。図 1.14、1.15 に示すように、式 (1.64) の積分路 C と面 ΔS を Yee のセルに一致するように選び、積分型の式 (1.64) から定式化する。例えば、図 1.14 左図のように、式 (1.64) の積分路 C と面 ΔS を $y-z$ 面を選ぶと

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{E} \Big|_{yz} &= \frac{1}{\Delta y \Delta z} \left\{ E_y^n(i, j + \frac{1}{2}, k) \Delta y + E_z^n(i, j + 1, k + \frac{1}{2}) \Delta z \right. \\ &\quad \left. - E_y^n(i, j + \frac{1}{2}, k + 1) \Delta y - E_z^n(i, j, k + \frac{1}{2}) \Delta z \right\} \\ &= -\mu \frac{\partial}{\partial t} H_x \end{aligned} \quad (1.65)$$

となる。上式を時間差分の式 (1.23b) で表し整理すると、式 (1.61) と同じ式が得られる。他の成分も同様に求めることができ、式 (1.58)-(1.63) と一致する。

1.3.6 FORTRAN コード化

式 (1.58)-(1.63) を実際にプログラムを組む場合、いろいろな方法があるが、ここでは図 1.16 に示すように、 E_x 、 E_y 、 E_z 、 H_x 、 H_y 、 H_z を一つのブロックとして、プログラム上同じ位置変数 (i, j, k) を割り当てる。それによって、式 (1.58)-(1.63) における、電磁界はプログラムでは次のように対応する。また、計算アルゴリズムをフローチャートにすると、図 1.17 のようになる。

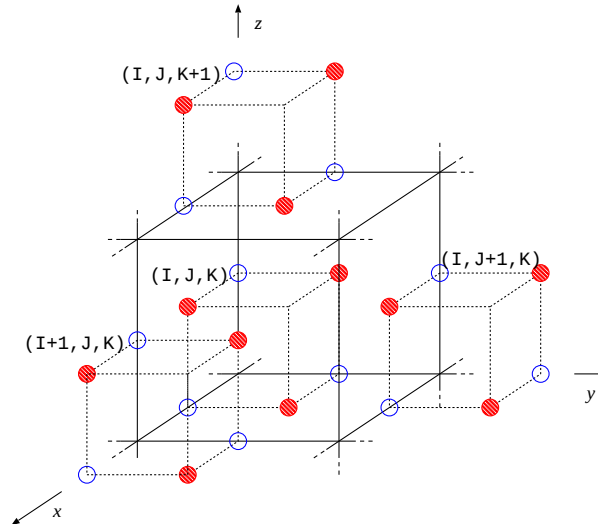


図 1.16: FORTRAN コード化

$$E_x^n(i + \frac{1}{2}, j, k) \Rightarrow \text{EX}(I, J, K) \quad (1.66)$$

$$E_y^n(i, j + \frac{1}{2}, k) \Rightarrow EY(I, J, K) \quad (1.67)$$

$$E_z^n(i, j, k + \frac{1}{2}) \Rightarrow EZ(I, J, K) \quad (1.68)$$

$$H_x^{n+\frac{1}{2}}(i, j + \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}) \Rightarrow HX(I, J, K) \quad (1.69)$$

$$H_y^{n+\frac{1}{2}}(i + \frac{1}{2}, j, k + \frac{1}{2}) \Rightarrow HY(I, J, K) \quad (1.70)$$

$$H_z^{n+\frac{1}{2}}(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}, k) \Rightarrow HZ(I, J, K) \quad (1.71)$$

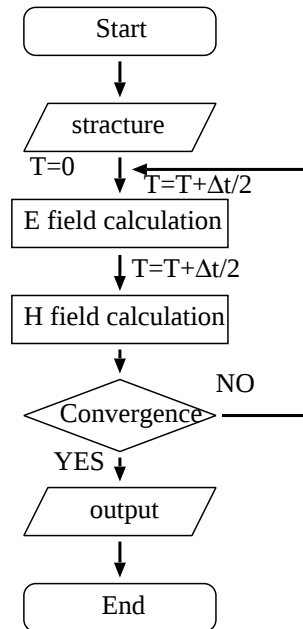


図 1.17: FDTD 法の計算フローチャート

1.4 物体のモデル化

誘電体や導体などを FDTD 法に組み込む (表現) するためには、定式化により求めた電磁界の式 (1.58-1.63) における媒質定数の ε 、 μ や σ に、媒質の値を代入すればよい。

1.4.1 誘電体

誘電体はその媒質の誘電率をその座標に対応する電磁界の各成分の式に代入することで、誘電体を含む電磁界を FDTD 法により求めることができる。しかし、周りと異なる誘電率を有する物体は、その形状が直方体

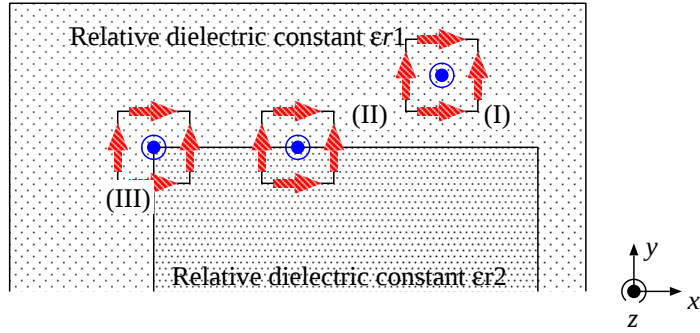


図 1.18: 誘電体の表現

でも完全に表現することができない。図 1.18 に示すように、境界を含まないセルの場合 (I) では、式 (1.58)、(1.59)、(1.60) において、

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_{r1} \quad (1.72)$$

とすればよいが、セルが媒質定数の異なる境界面を含む場合 (II)(III)、注意が必要になる。(II) の場合、

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \frac{\varepsilon_{r1} + \varepsilon_{r2}}{2} \quad (1.73)$$

(III) の場合、

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \frac{3\varepsilon_{r1} + \varepsilon_{r2}}{4} \quad (1.74)$$

となり、面積比の平均をとることになる。

1.4.2 完全導体

完全導体 (電氣的完全導体) 表面では、電界の接線成分と磁界の法線成分はともに 0 である。図 1.19 におい

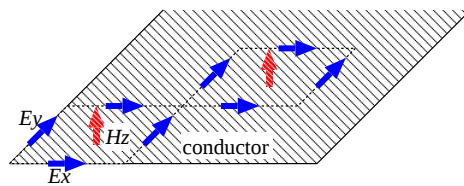


図 1.19: 完全導体の表現

て、導体表面を X-Y 平面上にあると仮定すると、導体表面上の電磁界は次のようになる。

$$E_x = 0, \quad E_y = 0, \quad H_z = 0 \quad (1.75)$$

1.5 入射波源

FDTD 法を用いて各種の解析を行う場合、励振源およびその励振方法は極めて重要となる。そこで、ここではまず FDTD 法に用いられる各種の励振源とその励振法について具体的に説明する。

1.5.1 CW 波

通常、自由空間の伝搬や導波管内の伝搬は CW 波 (Continuous Wave) が一般的である。次式は、この CW 波を表しており、極めて色々な解析に用いられる。

$$y(t) = A \sin(2\pi f \Delta t n) \quad (1.76)$$

ここで、 A :振幅、 f :周波数、 Δt :時間ステップ、 n :繰り返し数

1.5.2 ガウシアンパルス

FDTD 法を用いた解析法においては、その解析モデルとして例えば、アンテナや伝送路の周波数特性を解析する必要がある。この場合には次のようなガウシアンパルスを用いると便利である。

$$y(t) = A e^{-\{(\Delta t n - T_g)/0.29 T_g\}^2} \quad (1.77)$$

ここで、 T はガウシアンパルスを DFT(離散フーリエ変換) した場合、その電力スペクトルが 3dB 低下する周波数 f_0 (Hz) を用いて次のように決定される。

$$T_g = 0.646/f_0 \quad (1.78)$$

図 1.20 に $A = 1$ 、 $f_0 = 1\text{GHz}$ と選択した場合の時間領域 $y(t)$ と周波数領域 $Y(f)$ での波形を示す。

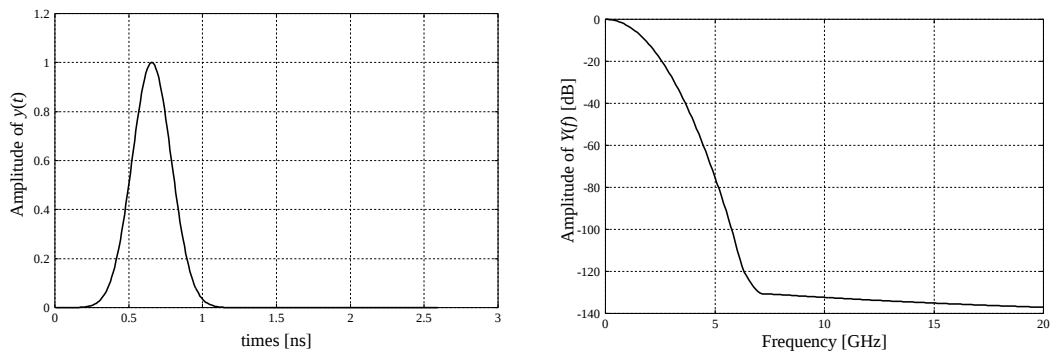


図 1.20: ガウシアンパルス

1.5.3 DC を含まないパルス

解析の種類によってはアンテナのインピーダンスの計算のように DC(直流成分) を含むと都合の悪い場合がある。このような解析に有効なのがガウシアンパルスと CW 波の積で表される波であり、次式で表される。

$$y(t) = A e^{-\{(\Delta t n - T_g)/0.29 T_g\}^2} A_m \sin(2\pi f_m \Delta t n) \quad (1.79)$$

図 1.21 に $f_m = 10\text{GHz}$ 、 $f_0 = 1\text{GHz}$ と選択した場合の時間領域 $y(t)$ と周波数領域 $Y(f)$ での波形を示す。

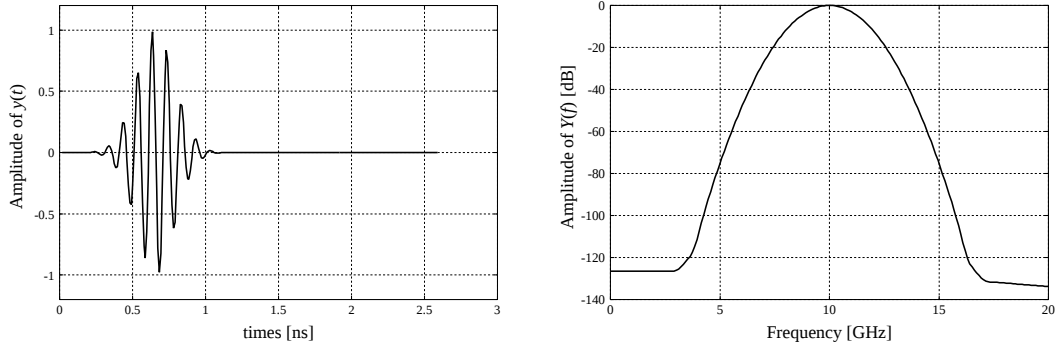


図 1.21: ガウシアンパルスと CW 波の積

1.6 計算上の条件

1.6.1 セルサイズ

FDTD 法では差分が基本であるから、セルサイズは細かければ細かい程、計算精度の高い結果が得られる。しかし、実際の計算では、計算機の記憶容量や計算時間等が問題となってくる。一般的には、解析周波数の最大値の波長の $1/10$ 以下にセルサイズを選ぶのが、妥当とされ、 $1/20$ 波長程度に選ぶと十分な計算精度が得られる。

1.6.2 時間ステップ

時間ステップ Δt は、Courant の安定条件より

$$v\Delta t \leq \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{\Delta x}\right)^2 + \left(\frac{1}{\Delta y}\right)^2 + \left(\frac{1}{\Delta z}\right)^2}} \quad (1.80)$$

としなければならない。この条件は極めて厳しく、わずかでも満足しなければ値が不安定になる。

1.7 解析対象が対称形状の場合の計算

解析対象物が対称形状で、境界面で次式の境界条件が成り立つ場合、対称面を磁気壁とすることでその磁気壁面以降の計算が不要になり、計算領域を半分にすることができる。その結果、計算時間やメモリ容量を節約できる。

$$\begin{aligned} \mathbf{n} \cdot \mathbf{E} &= 0 \\ \mathbf{n} \times \mathbf{H} &= 0 \end{aligned} \quad (1.81)$$

FDTD 法において、図 1.22 に示すように磁気壁では、境界面で次式の境界条件が成り立つ。壁が x - z 平面内の $j = s = J_{\max}/2$ に存在すると仮定すると、磁気壁面内の電磁界は

$$E_y = 0, \quad H_x = 0, \quad H_z = 0 \quad (1.82)$$

となる。しかし、磁気壁面内に電解の y 成分、磁界の x 成分と z 成分が存在しないため、次式で電磁界の境界条件を満足させる。

$$\begin{aligned} E_y(i, s - \frac{1}{2}, k) + E_y(i, s + \frac{1}{2}, k) &= 0 \\ H_x(i, s - \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}) + H_x(i, s + \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}) &= 0 \\ H_z(i, s - \frac{1}{2}, k) + H_z(i, s + \frac{1}{2}, k) &= 0 \end{aligned} \quad (1.83)$$

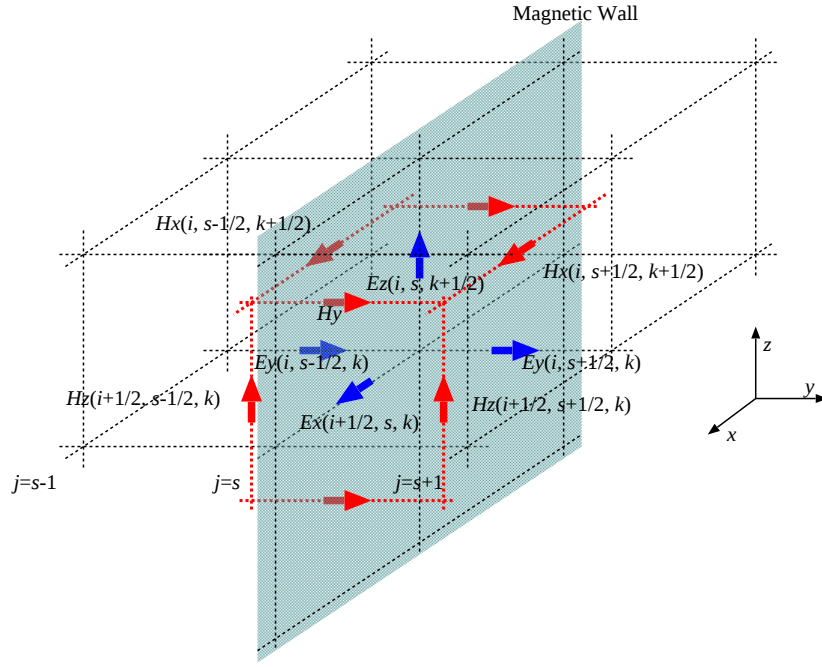


図 1.22: FDTD 法における磁気壁の取扱い

FDTD アルゴリズムにおいて、対称面 (磁気壁) 以外の領域 ($1 \leq i \leq i_{\max}$, $1 \leq j \leq s - 1/2$, $1 \leq k \leq k_{\max}$) では通常のアロリズムで計算する。対称面では、式 (1.83) を満足するように電磁界を計算する。磁気壁面内の電界 $E_x(i - \frac{1}{2}, s, k)$ と $E_z(i, s, k + \frac{1}{2})$ の計算には、式 (1.58)、(1.60) より磁壁面から半空間ステップ離れた計算領域外の磁界 $H_z(i - \frac{1}{2}, s + \frac{1}{2}, k)$ と $H_x(i, s + \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2})$ 成分がそれぞれ必要になる。この磁界 $H_z(i - \frac{1}{2}, s + \frac{1}{2}, k)$ と $H_x(i, s + \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2})$ 成分を、式 (1.83) より求めると、電界 $E_x(i - \frac{1}{2}, s, k)$ と $E_z(i, s, k + \frac{1}{2})$ は

$$\begin{aligned} E_x^{n+1}(i - \frac{1}{2}, s, k) &= E_x^n(i - \frac{1}{2}, s, k) \\ &+ \frac{\Delta t}{\varepsilon \Delta y} \left\{ -2H_z^{n+\frac{1}{2}}(i - \frac{1}{2}, s - \frac{1}{2}, k) \right\} \\ &- \frac{\Delta t}{\varepsilon \Delta z} \left\{ H_y^{n+\frac{1}{2}}(i - \frac{1}{2}, s, k + \frac{1}{2}) - H_y^{n+\frac{1}{2}}(i - \frac{1}{2}, s, k - \frac{1}{2}) \right\} \end{aligned} \quad (1.84)$$

$$\begin{aligned} E_z^{n+1}(i, s, k + \frac{1}{2}) &= E_z^n(i, s, k + \frac{1}{2}) \\ &+ \frac{\Delta t}{\varepsilon \Delta x} \left\{ H_y^{n+\frac{1}{2}}(i + \frac{1}{2}, s, k + \frac{1}{2}) - H_y^{n+\frac{1}{2}}(i - \frac{1}{2}, s, k + \frac{1}{2}) \right\} \end{aligned}$$

$$- \frac{\Delta t}{\varepsilon \Delta y} \left\{ -2H_x^{n+\frac{1}{2}}\left(i, s - \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}\right) \right\} \quad (1.85)$$

となる。磁気壁面内の磁界の $H_y(i, s, k + \frac{1}{2})$ 成分は、上式で求めた電界 $E_x(i + \frac{1}{2}, s, k)$ と $E_z(i, s, k + \frac{1}{2})$ より通常のアプローチで計算する。これにより、 y 軸における磁気壁面以降の計算は不要となり、解析領域を半分にすることができるので、計算時間やメモリ使用量を軽減できる。

第2章 吸収境界条件

解析領域が完全導体で囲まれているような閉領域を扱う場合は、境界上での電界の接線成分を 0 とすればよい。しかし、散乱界やアンテナの解析のような開放領域を扱う場合では、計算上仮想的な境界で解析領域を閉じる必要がある。このような仮想的な境界を吸収境界といい、その条件を吸収境界条件と言う。FDTD 法を適用してアンテナやマイクロストリップ線路などの開放構造を解析する場合には、コンピュータのメモリ容量と計算時間による制限があるため、まず解析構造に対する計算領域を有限にしなければならない。そのため、解析領域の最も外側のセル表面における電界の接線成分に対して、通常のアプローチでは中心差分式で計算できない。さらに、解析領域を有限にすることによるその境界はあくまでも FDTD 法の計算による境界であり、物理的には存在しない境界である。従って、このような境界面における反射は、計算領域に誤差を生じる要因になるため、その境界面に入ってくる電磁波が完全に吸収されるような特別な処理が必要になってくる。つまり、FDTD 法の解析領域の外側の境界における電界、磁界成分に対して吸収境界条件 (Absorbing Boundary Condition; ABC) を適用して計算を行わなければならない。

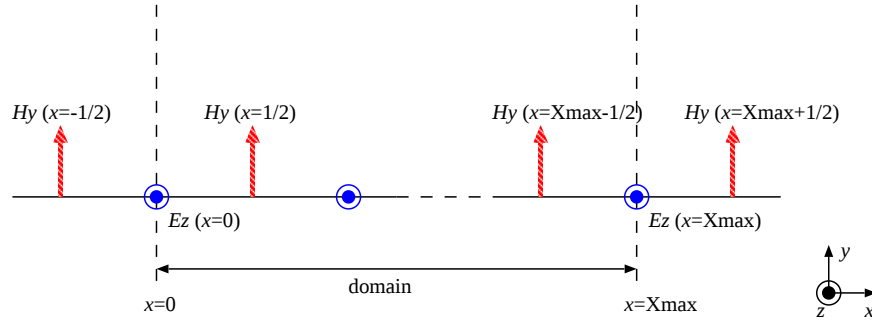


図 2.1: 吸収境界条件はなぜ必要?

図 2.1 のように簡単な 1 次元の場合を考える。 $x = 0$ の点において電界 $E_z^{n+1}(x = 0)$ は式 (1.37) より、 $E_z^n(x = 0)$ および $H_y^{n+1/2}(x = 1/2)$ と $H_y^{n+1/2}(x = -1/2)$ から求まる。しかし、 $x = -1/2$ は領域外のため磁界 $H_y^n(x = -1/2)$ の値を決めることができず、境界上の電界 $E_z^{n+1}(x = 0)$ を通常のアプローチでは求めることができない。

これまでに、数多くの吸収境界条件が提案されてきたが、その中から最もポピュラーな Mur の吸収境界条件と現在のところ最も有効な Berenger の PML (Perfect Matched Layer) について説明する。

2.1 Mur の吸収境界条件

マクスウェルの基本方程式 (1.7) を時間変化が時間因子 $e^{j\omega t}$ で表されるものとすれば、次式のようなベクトル・ヘルムホルツの方程式が得られる。

$$\nabla^2 \mathbf{E} + k^2 \mathbf{E} = j\omega\mu \mathbf{J} + \frac{1}{\epsilon} \nabla \rho \quad (2.1a)$$

$$\nabla^2 \mathbf{H} + k^2 \mathbf{H} = -\nabla \times \mathbf{J} \quad (2.1b)$$

波源の無い場合は、次式で得られる。

$$\nabla^2 \mathbf{E} + k^2 \mathbf{E} = 0 \quad (2.2a)$$

$$\nabla^2 \mathbf{H} + k^2 \mathbf{H} = 0 \quad (2.2b)$$

ここで、 k は波数または伝搬定数ともいわれ、

$$k^2 = \omega^2 \varepsilon \mu, \quad k = \frac{\omega}{v} \quad (2.3)$$

で表される。更に、 E_x 、 E_y 、 E_z の成分で考えると

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \right) E_i = 0, \quad (i = x, y, z) \quad (2.4)$$

の関係式が得られる。

Mur の吸収境界条件の基本的な考え方では、吸収境界面に到達する平面波に対して、その反射波の大きさがゼロになるように境界面上の電磁界分布を求める。図 2.1 のような場合、 $x = 0$ の境界面では、 $x \leq 0$ より伝搬して来た平面波の電界 E_z に対して

$$\frac{\partial}{\partial x} E_z - j k_x E_z = 0 \quad (2.5)$$

が成り立てば良い。ただし平面波の波数ベクトルを $\mathbf{k} = k_x \hat{\mathbf{x}} + k_y \hat{\mathbf{y}} + k_z \hat{\mathbf{z}}$ とし、 $k_x = \sqrt{k^2 - k_y^2 - k_z^2}$ としている。

2.1.1 Mur の 1 次の吸収境界条件

$x = 0$ の境界面に到達する平面波の入射角が非常に小さい場合 ($k_y^2 + k_z^2 \ll k^2$)、 k_x の最も簡単な近似として

$$\begin{aligned} k_x &= k \sqrt{1 - \left(\frac{k_y}{k} \right)^2 - \left(\frac{k_z}{k} \right)^2} \\ &= k \left[1 + O \left\{ \left(\frac{k_y}{k} \right)^2 + \left(\frac{k_z}{k} \right)^2 \right\} \right] \\ &\simeq \frac{\omega}{v} \\ &\simeq \frac{1}{v} \left(-j \frac{\partial}{\partial t} \right) \end{aligned} \quad (2.6)$$

上式を式 (2.5) に代入すると、

$$\left(\frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{1}{v} \frac{\partial E_z}{\partial t} \right) = 0 \quad (2.7)$$

が得られる。このようにして k_x の 1 次近似より Mur の 1 次吸収境界条件が導出される。 E_x 、 E_y の吸収境界条件も同様にして得られ、 $x = 0$ の吸収境界面の電界の条件式は

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} \right) E_i|_{x=0} = 0, \quad (i = x, y, z) \quad (2.8)$$

となる。

ここで、図 2.2 のように吸収境界に x の正の方向から E_z 成分を持ち、速度 v で伝搬する平面波が Y 軸に対し垂直に入射する場合を考える。

この場合、波動方程式が、

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} = 0 \quad (2.9)$$

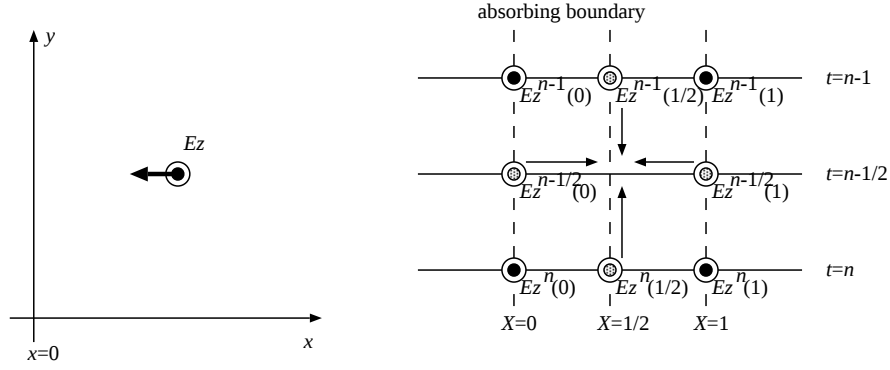


図 2.2: 吸収境界への平面波の入射

で表され、

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} \right) E_z = 0 \quad (2.10)$$

と式変形を行い、時間の項が $e^{j\omega t}$ であるから、第 1 項が負の方向に進む波、第 2 項が正の方向に進む波に対応する。式 (2.7) は図 2.2 のような場合の、完全に負の方向の進行波のみの界を表していることになる。すなわち、式 (2.7) は境界面に対して垂直に入射する場合に適応できる条件式である。

次に 1 次吸収境界条件式 (2.7) を Yee アルゴリズムに適応するように、時間項について差分化すると

$$\frac{\partial E_z}{\partial t} \Big|_{t=(n-\frac{1}{2})} = \frac{E_z^n - E_z^{n-1}}{\Delta t} \quad (2.11)$$

となり、空間について差分化すると

$$\frac{\partial E_z}{\partial x} \Big|_{x=\frac{1}{2}} = \frac{E_z(1) - E_z(0)}{\Delta x} \quad (2.12)$$

となり、次式を得る。

$$\frac{E_z^n(\frac{1}{2}) - E_z^{n-1}(\frac{1}{2})}{\Delta t} = \frac{E_z^{n-\frac{1}{2}}(1) - E_z^{n-\frac{1}{2}}(0)}{\Delta x} v \quad (2.13)$$

しかし、 $t = n - \frac{1}{2}$ 、 $x = \frac{1}{2}$ には電界 E_z は割り当てられていないため、それらの前後の値で平均する。すなわち、

$$E_z^n(\frac{1}{2}) = \frac{E_z^n(0) + E_z^n(1)}{2} \quad (2.14)$$

$$E_z^{n-\frac{1}{2}}(1) = \frac{E_z^n(1) + E_z^{n-1}(1)}{2} \quad (2.15)$$

として代入する。それによって、電界 E_z の $x = 0$ における Mur の 1 次吸収境界条件の差分式が得られる。

$$\begin{aligned} E_z^n \left(0, j, k + \frac{1}{2} \right) &= E_z^{n-1} n_z \left(1, j, k + \frac{1}{2} \right) \\ &+ \frac{v\Delta t - \Delta x}{v\Delta t + \Delta x} \left\{ E_z^n \left(1, j, k + \frac{1}{2} \right) - E_z^{n-1} \left(0, j, k + \frac{1}{2} \right) \right\} \end{aligned} \quad (2.16)$$

第2章 吸収境界条件

$x = IXMAX$ の場合を考える。 $x = 0$ の場合と同様に、境界において完全に進行波のみであるためには、 E_z が次式で表されなければならない。

$$\left(\frac{\partial E_z}{\partial x} + \frac{1}{v} \frac{\partial E_z}{\partial t} \right) = 0 \quad (2.17)$$

上式を Yee アルゴリズムに適応するように、時間項と空間について差分化すると、次式を得る。

$$\frac{E_z^n(IXMAX - \frac{1}{2}) - E_z^{n-\frac{1}{2}}(IXMAX - \frac{1}{2})}{\Delta t} = \frac{E_z^{n-\frac{1}{2}}(IXMAX - 1) - E_z^{n-\frac{1}{2}}(IXMAX)}{\Delta x} \quad (2.18)$$

同じように、 $t = (n - \frac{1}{2})\Delta t$ 、 $x = (IXMAX - \frac{1}{2})\Delta x$ には電界 E_z は割り当てられていないため、それらの前後の値で平均すると、

$$\begin{aligned} E_z^n \left(IXMAX, j, k + \frac{1}{2} \right) &= E_z^{n-1} \left(IXMAX - 1, j, k + \frac{1}{2} \right) \\ &+ \frac{v\Delta t - \Delta x}{v\Delta t + \Delta x} \left\{ E_z^n \left(IXMAX - 1, j, k + \frac{1}{2} \right) - E_z^{n-1} \left(IXMAX, j, k + \frac{1}{2} \right) \right\} \end{aligned} \quad (2.19)$$

電界 E_z の $x = IXMAX$ における Mur の 1 次吸収境界条件式が得られる。

2.1.2 Mur の 2 次の吸収境界条件

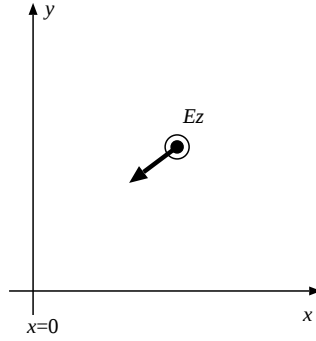


図 2.3: 吸収境界への平面波の入射

式 (2.7) の 1 次近似による吸収境界条件は、図 2.3 のように吸収境界面への入射角が大きい場合は吸収特性が悪くなる。そこで、式 (2.5) に対して k_x の 2 次近似を求めると、次式ようになる。

$$\begin{aligned} k_x &= k \sqrt{1 - \left(\frac{k_y}{k} \right)^2 - \left(\frac{k_z}{k} \right)^2} \\ &= k \left[1 - \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{k_y}{k} \right)^2 + \left(\frac{k_z}{k} \right)^2 \right\} + O \left\{ \left(\frac{k_y}{k} \right)^2 + \left(\frac{k_z}{k} \right)^2 \right\}^2 \right] \\ &\simeq \frac{\omega}{v} \left\{ 1 - \frac{v^2}{2\omega^2} (k_y^2 + k_z^2) \right\} \\ &\simeq -j \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} + j \frac{v}{2} \frac{1}{\partial t} \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \end{aligned} \quad (2.20)$$

上式を式 (2.5) に代入すると、

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x \partial t} - \frac{1}{v} \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} + \frac{v}{2} \left(\frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} \right) = 0 \quad (2.21)$$

が得られる。このようにして k_x の 1 次近似より Mur の 2 次吸収境界条件が導出される。 E_x 、 E_y の吸収境界条件も同様にして得られ、 $x = 0$ の吸収境界面の電界の条件式は

$$\left\{ \frac{\partial^2}{\partial x \partial t} - \frac{1}{v} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{v}{2} \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \right\} E_i|_{x=0} = 0, \quad (i = x, y, z) \quad (2.22)$$

となる。

式 (2.21) を 1 次の Mur と同様に差分化すると、

$$\begin{aligned} E_z^n(0, j, k + \frac{1}{2}) &= -E_z^{n-2}(1, j, k + \frac{1}{2}) \\ &+ \frac{v\Delta t - \Delta x}{v\Delta t + \Delta x} \left\{ E_z^n(1, j, k + \frac{1}{2}) + E_z^{n-2}(0, j, k + \frac{1}{2}) \right\} \\ &+ \frac{2\Delta x}{v\Delta t + \Delta x} \left\{ E_z^{n-1}(0, j, k + \frac{1}{2}) + E_z^{n-1}(1, j, k + \frac{1}{2}) \right\} \\ &+ \frac{\Delta x(v\Delta t)^2}{2(\Delta y)^2(v\Delta t + \Delta x)} \\ &\quad \left\{ E_z^{n-1}(0, j+1, k + \frac{1}{2}) - 2E_z^{n-1}(0, j, k + \frac{1}{2}) + E_z^{n-1}(0, j-1, k + \frac{1}{2}) \right. \\ &\quad \left. + E_z^{n-1}(1, j+1, k + \frac{1}{2}) - 2E_z^{n-1}(1, j, k + \frac{1}{2}) + E_z^{n-1}(1, j-1, k + \frac{1}{2}) \right\} \\ &+ \frac{\Delta x(v\Delta t)^2}{2(\Delta z)^2(v\Delta t + \Delta x)} \\ &\quad \left\{ E_z^{n-1}(0, j, k + \frac{3}{2}) - 2E_z^{n-1}(0, j, k + \frac{1}{2}) + E_z^{n-1}(0, j, k - \frac{1}{2}) \right. \\ &\quad \left. + E_z^{n-1}(1, j, k + \frac{3}{2}) - 2E_z^{n-1}(1, j, k + \frac{1}{2}) + E_z^{n-1}(1, j-1, k - \frac{1}{2}) \right\} \end{aligned} \quad (2.23)$$

となる。

$x = I X M A X$ の場合を考える。 $x = 0$ の場合と同様に、境界において完全に進行波のみであるためには、 E_z が次式で表されなければならない。

$$\left\{ \frac{\partial^2}{\partial x \partial t} + \frac{1}{v} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{v}{2} \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \right\} E_i|_{x=0} = 0, \quad (i = x, y, z) \quad (2.24)$$

同様に差分化すると、次式を得る。

$$\begin{aligned} E_z^n(I X M A X, j, k + \frac{1}{2}) &= -E_z^{n-2}(I X M A X - 1, j, k + \frac{1}{2}) \\ &+ \frac{v\Delta t - \Delta x}{v\Delta t + \Delta x} \left\{ E_z^n(I X M A X - 1, j, k + \frac{1}{2}) + E_z^{n-2}(I X M A X, j, k + \frac{1}{2}) \right\} \\ &+ \frac{2\Delta x}{v\Delta t + \Delta x} \left\{ E_z^{n-1}(I X M A X, j, k + \frac{1}{2}) + E_z^{n-1}(I X M A X - 1, j, k + \frac{1}{2}) \right\} \\ &+ \frac{\Delta x(v\Delta t)^2}{2(\Delta y)^2(v\Delta t + \Delta x)} \\ &\quad \left\{ E_z^{n-1}(I X M A X, j+1, k + \frac{1}{2}) - 2E_z^{n-1}(I X M A X, j, k + \frac{1}{2}) + E_z^{n-1}(I X M A X, j-1, k + \frac{1}{2}) \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & +E_z^{n-1}(IXMAX-1, j+1, k+\frac{1}{2}) - 2E_z^{n-1}(IXMAX-1, j, k+\frac{1}{2}) + E_z^{n-1}(IXMAX-1, j-1, k+\frac{1}{2}) \Big\} \\
 & + \frac{\Delta x (v\Delta t)^2}{2(\Delta z)^2(v\Delta t + \Delta x)} \\
 & \left\{ E_z^{n-1}(IXMAX, j, k+\frac{3}{2}) - 2E_z^{n-1}(IXMAX, j, k+\frac{1}{2}) + E_z^{n-1}(IXMAX, j, k-\frac{3}{2}) \right. \\
 & \left. + E_z^{n-1}(IXMAX-1, j, k+\frac{3}{2}) - 2E_z^{n-1}(IXMAX-1, j, k+\frac{1}{2}) + E_z^{n-1}(IXMAX-1, j-1, k-\frac{1}{2}) \right\} \\
 & \hspace{15em} (2.25)
 \end{aligned}$$

実際に Mur の 2 次の吸収境界条件を用いいる場合、上記の差分式より、図 2.4 の斜線矢印で表される E_z に関しては、次の吸収境界条件を適用する事ができず、1 次の差分式を使う事になる。

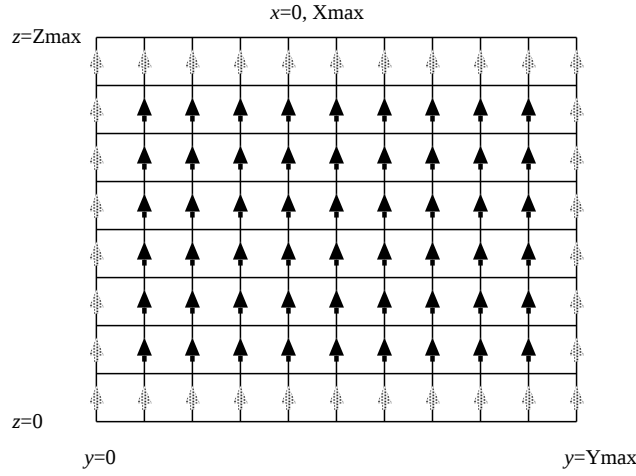


図 2.4: Mur の吸収境界条件の実際

2.2 PML 吸収境界条件

ここでは、現在提案されている吸収境界条件のなかで最も吸収特性の良いとされている J.P.Berenger の PML(Perfectly Matched Layer) 吸収境界条件について説明する。

PML 吸収境界を FDTD 法に適用した場合の解析領域の様子を図 2.5 に示す。解析領域の端より L 層のセルで構成する領域を設け、そのセルに導電率、導磁率を導入しその損失により波を吸収するようになっている。

2.2.1 基本概念

PML の吸収境界条件は、必要とする計算機メモリは増加するものの、現時点では最も有効な吸収境界条件である。PML の定式化を行うためには、磁気損失 (magnetic loss) σ^* を考え、(1.7) 式に示すようなマクスウェルの方程式の代わりに損失項を含んだマクスウェルの方程式を用いる。PML の基本理論を知るために、平面波が垂直に入射する場合を考える。

$$\nabla \times \mathbf{H} = \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \sigma \mathbf{E} \hspace{10em} (2.26)$$

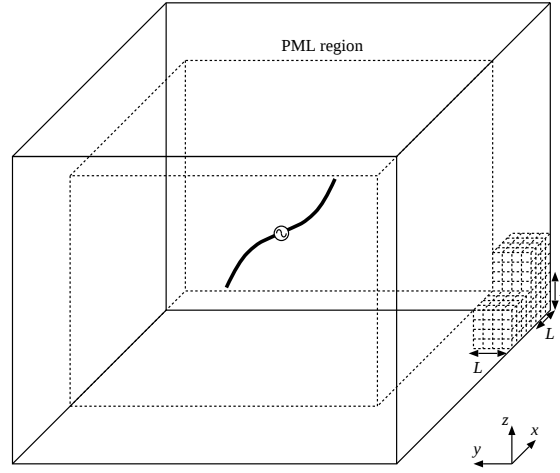


図 2.5: PML 吸収境界の領域

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} - \sigma^* \mathbf{H} \quad (2.27)$$

真空中の波動インピーダンス Z_0 、媒質中の波動インピーダンス Z は、

$$Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \quad (2.28)$$

$$Z = \sqrt{\frac{\mu_0 + \frac{\sigma_0}{j\omega}}{\varepsilon_0 + \frac{\sigma}{j\omega}}} \quad (2.29)$$

で与えられる。ただし、 ε_0 、 μ_0 はそれぞれ真空中の誘電率、透磁率である。従って、 $Z_0 = Z$ 。すなわち、

$$\frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma^*}{\mu_0} \quad (2.30)$$

を満たせば周波数に無関係に反射係数は 0 になり、電磁波は反射なしで媒質へ浸透する。しかしながら、斜め入射の場合には式 (2.30) の条件を満たしたとしても反射係数は 0 にならない。したがって、このような媒質で FDTD 法の解析領域を囲んだとしても、吸収境界から反射波は 0 とはならない。Berenger はこれを解決するために、新たな誘電率、磁気損失を導入した非物理的な媒質を考案した。これを PML (Perfectly Matched Layer) とする。ここでは、PML 吸収境界条件の基本理論の簡単化のために 2 次元の場合を考える。

2.2.2 基本方程式

TE 波の PML

図 2.6 のように z 成分の磁界をもつ平面波が入射した場合の反射係数 R は

$$R = \frac{Z \cos \theta_i - Z_0 \cos \phi}{Z \cos \theta_i + Z_0 \cos \phi} \quad (2.31)$$

で与えられるから、周波数および入射角に無関係に $R = 0$ となるためには、式 (2.30) のインピーダンスマッチング条件を満足し、かつ入射角 θ_i と屈折角 ϕ が等しくなるような媒質があればよい。このようなことは、現実の媒質では起こり得ない。PML 媒質は人工的な仮想媒質である。

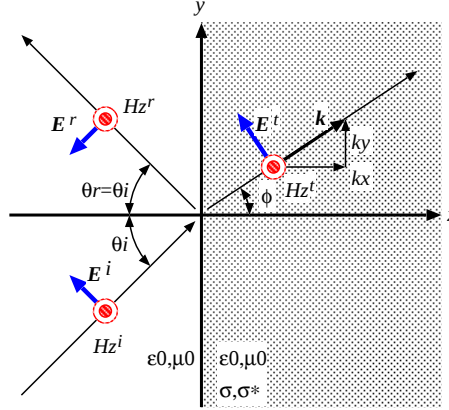


図 2.6: 平面波の斜め入射

PML 媒質中の波を図 2.7 に示すように、 x 軸方向に進む波と y 軸方向に進む波に分けて考える。波数 k の y 成分 k_y (y 軸方向の波数) はスネルの法則により、真空中の波数 k_0 の y 成分 k_{0y} と等しいため y 軸方向には真空中と同じように伝搬する。一方、 x 軸方向に伝搬する波において、その波数 k_x は現実では媒質の境界面で不連続になるが、インピーダンスマッチングの条件を満足するためには、 k_x も連続でなければならない。そこで、図 2.6 のように x 軸に垂直な媒質の場合、波を x 軸方向と y 軸方向に独立に進行する波に分け、 x 軸方向に進む波にのみインピーダンスマッチングがとれるような媒質を考える。即ち、 x 方向に進む波の成分に対して非物理的な仮想媒質を考え、 y 軸に垂直な媒質の場合には y 方向に進む成分に対して仮想媒質をおくことになる。

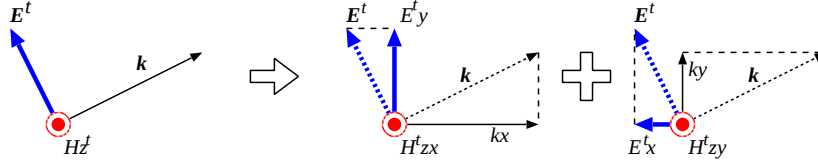


図 2.7: 平面波の成分分解

媒質中を伝搬する波は

$$\mu_0 \frac{\partial H_z}{\partial t} + \sigma^* H_z = - \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) \quad (2.32a)$$

$$\varepsilon_0 \frac{\partial E_x}{\partial t} + \sigma E_x = \frac{\partial H_z}{\partial y} \quad (2.32b)$$

$$\varepsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t} + \sigma E_y = - \frac{\partial H_z}{\partial x} \quad (2.32c)$$

図 2.7 の様に x 方向と y 方向に独立に進む平面波 H_{zx} と H_{zy} にわけると、 H_z は

$$H_z = H_{zx} + H_{zy} \quad (2.33)$$

となり、これを式 (2.32) に代入すると、

$$\mu_0 \frac{\partial H_{zx}}{\partial t} + \sigma_x^* H_{zx} + \mu_0 \frac{\partial H_{zy}}{\partial t} + \sigma_y^* H_{zy} = - \frac{\partial E_y}{\partial x} + \frac{\partial E_x}{\partial y} \quad (2.34a)$$

$$\varepsilon_0 \frac{\partial E_x}{\partial t} + \sigma_y E_x = \frac{\partial H_z}{\partial y} \quad (2.34b)$$

$$\left(\begin{aligned} \frac{\partial H_z}{\partial y} &= \frac{\partial(H_{zx} + H_{zy})}{\partial y} = \frac{\partial H_{zy}}{\partial y} \\ \varepsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t} + \sigma_x E_y &= -\frac{\partial H_z}{\partial x} \end{aligned} \right) \quad (2.34c)$$

$$\left(\begin{aligned} \frac{\partial H_z}{\partial x} &= \frac{\partial(H_{zx} + H_{zy})}{\partial x} = \frac{\partial H_{zx}}{\partial x} \\ \mu_0 \frac{\partial H_{zy}}{\partial t} + \sigma_y^* H_{zy} &= \frac{\partial E_x}{\partial y} \end{aligned} \right) \quad (2.34d)$$

が得られる。 x 方向と y 方向に独立に進む平面波に分離すると、仮想媒質内で x 方向に進む平面波は、

$$\mu_0 \frac{\partial H_{zx}}{\partial t} + \sigma_x^* H_{zx} = -\frac{\partial E_y}{\partial x} \quad (2.35a)$$

$$\varepsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t} + \sigma_x E_y = -\frac{\partial H_z}{\partial x} \quad (2.35b)$$

となり、さらに y 方向に進む平面波は真空中と同じとしたため、 $\sigma_y = \sigma_y^* = 0$ とすると、

$$\mu_0 \frac{\partial H_{zy}}{\partial t} = \frac{\partial E_x}{\partial y} \quad (2.36a)$$

$$\varepsilon_0 \frac{\partial E_x}{\partial t} = \frac{\partial H_z}{\partial y} \quad (2.36b)$$

となる。

また、 y 軸に垂直な媒質の場合、同様に仮想媒質内で x 方向に進む平面波は、

$$\mu_0 \frac{\partial H_{zx}}{\partial t} = -\frac{\partial E_y}{\partial x} \quad (2.37a)$$

$$\varepsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t} = -\frac{\partial H_z}{\partial x} \quad (2.37b)$$

となり、 y 方向に進む平面波は、

$$\mu_0 \frac{\partial H_{zy}}{\partial t} + \sigma_y^* H_{zy} = \frac{\partial E_x}{\partial y} \quad (2.38a)$$

$$\varepsilon_0 \frac{\partial E_x}{\partial t} + \sigma_y E_x = \frac{\partial H_z}{\partial y} \quad (2.38b)$$

と求める事ができる。

一般的に TE 波は、これらの重ね合わせであるから、式 (2.35)-(2.38) より、

$$\varepsilon_0 \frac{\partial E_x}{\partial t} + \sigma_y E_x = \frac{\partial H_z}{\partial y} = \frac{\partial(H_{zx} + H_{zy})}{\partial y} \quad (2.39a)$$

$$\varepsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t} + \sigma_x E_y = -\frac{\partial H_z}{\partial x} = -\frac{\partial(H_{zx} + H_{zy})}{\partial x} \quad (2.39b)$$

$$\mu_0 \frac{\partial H_{zx}}{\partial t} + \sigma_x^* H_{zx} = -\frac{\partial E_y}{\partial x} \quad (2.40a)$$

$$\mu_0 \frac{\partial H_{zy}}{\partial t} + \sigma_y^* H_{zy} = \frac{\partial E_x}{\partial y} \quad (2.40b)$$

となる。

式 (2.39)、式 (2.40) において $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_x^* = \sigma_y^* = 0$ とすると式は真空中のマクスウェルの方程式となり、 $\sigma_x = \sigma_y$ 、 $\sigma_x^* = \sigma_y^* = 0$ ならば通常の損失媒質である。また、 $\sigma_x = \sigma_y = \sigma$ 、 $\sigma_x^* = \sigma_y^* = \sigma$ ならば垂直入射に対

してインピーダンス整合のとれた媒質となる。以上のことから、式 (2.39)、式 (2.40) は物理的な媒質を人工的に一般化した媒質を表していると解釈できる。

次に、PML 媒質中で正弦波振動する平面波の伝搬を考える。電界 E が y 軸から ϕ だけ傾いているとして、式 (2.39)、式 (2.40) を周波数領域で解くと、

$$E_x = -E_0 \sin \phi e^{-j(k_x x + k_y y)} \quad (2.41a)$$

$$E_y = E_0 \cos \phi e^{-j(k_x x + k_y y)} \quad (2.41b)$$

$$\begin{aligned} H_z &= H_0 e^{-j(k_x x + k_y y)} \\ &= (H_{zx0} + H_{zy0}) e^{-j(k_x x + k_y y)} \end{aligned} \quad (2.41c)$$

より、

$$H_{zx0} = \frac{k_y}{\omega \mu_x^*} E_0 \cos \phi \quad (2.42a)$$

$$H_{zy0} = \frac{k_x}{\omega \mu_y^*} E_0 \sin \phi \quad (2.42b)$$

$$\varepsilon_x^* \cos \phi = \frac{k_y}{\omega^2} \left(\frac{k_x}{\mu_x^*} \cos \phi + \frac{k_y}{\mu_y^*} \sin \phi \right) \quad (2.43a)$$

$$\varepsilon_y^* \sin \phi = \frac{k_x}{\omega^2} \left(\frac{k_x}{\mu_x^*} \cos \phi + \frac{k_y}{\mu_y^*} \sin \phi \right) \quad (2.43b)$$

となる。ただし

$$\begin{aligned} \varepsilon_x^* &= \varepsilon_0 + \frac{\sigma_x}{j\omega}, \quad \mu_x^* = \mu_0 + \frac{\sigma_x^*}{j\omega} \\ \varepsilon_y^* &= \varepsilon_0 + \frac{\sigma_y}{j\omega}, \quad \mu_y^* = \mu_0 + \frac{\sigma_y^*}{j\omega} \end{aligned} \quad (2.44)$$

である。さらに、式 (2.43) より

$$\frac{\varepsilon_y^* \sin \phi}{\varepsilon_x^* \cos \phi} = \frac{k_y}{k_x} \quad (2.45)$$

であるから、式 (2.43) と式 (2.45) から k_x 、 k_y を求めると

$$k_x = \frac{\omega}{Y} \varepsilon_x^* \cos \phi \quad (2.46a)$$

$$k_y = \frac{\omega}{Y} \varepsilon_y^* \sin \phi \quad (2.46b)$$

となる。ただし

$$Y = \sqrt{Y_x^2 \cos^2 \phi + Y_y^2 \sin^2 \phi} \quad (2.47a)$$

$$Y_x = \sqrt{\frac{\varepsilon_x^*}{\mu_x^*}} \quad (2.47b)$$

$$Y_y^* = \sqrt{\frac{\varepsilon_y^*}{\mu_y^*}} \quad (2.47c)$$

である。式 (2.46) を式 (2.42) に代入すると

$$H_0 = H_{zx0} + H_{zy0} = Y E_0 \quad (2.48)$$

となるから、PML 媒質中の波動インピーダンス Z は

$$Z = \frac{E_0}{H_0} = \frac{1}{Y} \quad (2.49)$$

となる。したがって、 Y は PML 媒質中の波動アドミタンスである。これが解析領域中の波動インピーダンス Z_0 と等しくなるためには、式 (2.47) より、

$$Y_x^2 = \frac{1}{Z_0^2}, \quad Y_y^2 = \frac{1}{Z_0^2} \quad (2.50)$$

と、 x 、 y 方向ともに独立にインピーダンスマッチングが成立すれば良い。式 (2.50) は、式 (2.44)、(2.47) より、

$$\frac{\mu_0 + \frac{\sigma_x^*}{j\omega}}{\varepsilon_0 + \frac{\sigma_x}{j\omega}} = \frac{\mu_0}{\varepsilon_0}, \quad \frac{\mu_0 + \frac{\sigma_y^*}{j\omega}}{\varepsilon_0 + \frac{\sigma_y}{j\omega}} = \frac{\mu_0}{\varepsilon_0} \quad (2.51)$$

であるから、導電率と磁気導電率との間に

$$\frac{\sigma_x}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma_x^*}{\mu_0}, \quad \frac{\sigma_y}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma_y^*}{\mu_0} \quad (2.52)$$

なる関係が成立すると、PML 媒質中の波動インピーダンスは周波数や入射角 ϕ に依存せず、自由空間の波動インピーダンス Z_0 と等しくなる。また、このとき PML 内の波数 k_x 、 k_y は、式 (2.44)、(2.46) より、

$$k_x = \left(\frac{\omega}{c} - j \frac{\sigma_x}{\varepsilon_0 c} \right) \cos \phi \quad (2.53a)$$

$$k_y = \left(\frac{\omega}{c} - j \frac{\sigma_y}{\varepsilon_0 c} \right) \sin \phi \quad (2.53b)$$

となるから、電磁界の任意の成分 ψ は

$$\psi = \psi_0 e^{-j \frac{\omega}{c} (x \cos \phi + y \sin \phi)} e^{-\frac{\sigma_x \cos \phi}{\varepsilon_0 c} x} e^{-\frac{\sigma_y \sin \phi}{\varepsilon_0 c} y} \quad (2.54)$$

となる。すなわち、PML 内の波は x 、 y 方向に指数関数的に減衰しながら光速で伝搬することがわかる。図 2.6 のように x 軸に垂直な PML 媒質に平面波が入射する場合には、スネルの法則より y 軸方向の波数 k_y が真空中の波数 $k_0 (= \frac{\omega}{c} \sin \phi)$ に等しくならなければならないことから、式 (2.52) のマッチング条件はさらに簡単になり、

$$\frac{\sigma_x}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma_x^*}{\mu_0} \quad (2.55a)$$

$$\sigma_y = \sigma_y^* = 0 \quad (2.55b)$$

同様に、 y 軸に垂直な PML 媒質中に平面波が入射する場合のマッチング条件は、

$$\sigma_x = \sigma_x^* = 0 \quad (2.56a)$$

$$\frac{\sigma_y}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma_y^*}{\mu_0} \quad (2.56b)$$

となる。

式 (2.55)、(2.56) が成り立てば任意の入射角、任意の周波数が反射係数が 0 となるから、それぞれの PML 媒質を吸収境界として使うことができる。しかし、FDTD 法の吸収境界とするためには、PML を有限の厚さで打ち切らなければならない。そうすると PML の外壁でも幾分かの反射が起こる。これを避けるために、実際

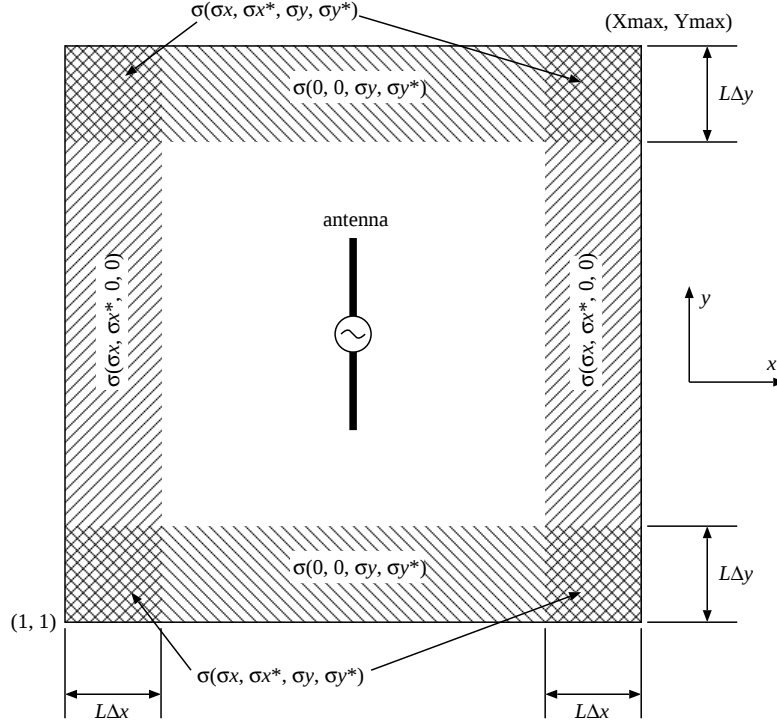


図 2.8: PML 吸収境界

の計算では PML を数値配置し、徐々に損失を大きくすることによって、電磁界を十分に減衰させるようにする。こうすることによって最外壁を、完全導体あるいは完全磁壁 (磁界の接線成分が 0) で囲むことができる。

以上の議論をもとに、PML 吸収境界と各領域での導電率、磁気損失を示したのが図 (2.8) である。媒質定数の不連続による誤差を避けるため導電率、磁気損失を

$$\sigma_x(i) = \begin{cases} \sigma_{\max} \left[\frac{L\Delta x - i\Delta x}{L\Delta x} \right]^M & ; i\Delta x < L\Delta x \\ 0 & ; L\Delta x < i\Delta x < (X_{\max} - L)\Delta x \\ \sigma_{\max} \left[\frac{i\Delta x - (X_{\max} - L)\Delta x}{L\Delta x} \right]^M & ; i\Delta x > (X_{\max} - L)\Delta x \end{cases} \quad (2.57a)$$

$$\sigma_y(j) = \begin{cases} \sigma_{\max} \left[\frac{L\Delta y - j\Delta y}{L\Delta y} \right]^M & ; j\Delta y < L\Delta y \\ 0 & ; L\Delta y < j\Delta y < (Y_{\max} - L)\Delta y \\ \sigma_{\max} \left[\frac{j\Delta y - (Y_{\max} - L)\Delta y}{L\Delta y} \right]^M & ; j\Delta y > (Y_{\max} - L)\Delta y \end{cases} \quad (2.57b)$$

$$\begin{cases} \sigma_x^* = \frac{\mu_0}{\varepsilon_0} \sigma_x \\ \sigma_y^* = \frac{\mu_0}{\varepsilon_0} \sigma_y \end{cases} \quad (2.58a)$$

とする。ただし、 L は PML 層の数、 $\sigma_{\max}$ は外壁の導電率、 M は導電率の分布を与える次数である。

このような構造の PML の反射係数の大きさは

$$|R(\phi)| \cong e^{-\frac{2\sigma_{\max}L\Delta x \cos \phi}{(M+1)\varepsilon_0 c}} \quad (2.59a)$$

となる。ただし、 ϕ は入射角度である。

次に、定数 M 、 L および $\sigma_{\max}$ の決め方としては、PML 内での電磁界の変化が緩やかになるように $M = 2 \sim 4$ とするのが一般的である。また、層の数 L は要求される反射率によって異なるが、 $4 \sim 16$ 層とするのがよい。さらに、 $\sigma_{\max}$ は M 、 L を定めた後、 $\phi = 0$ として要求する反射係数と式 (2.59) から

$$\sigma_{\max} = -\frac{(M+1)\varepsilon_0 c}{2L\Delta x} \ln |R(0)| \quad (2.60)$$

のように決める。

TE 波の PML 媒質内での FDTD 定式化

PML を FDTD 法に組み込むために式 (2.39)、式 (2.40) を FDTD 形式に定式化する。まず、 $(n-1/2)\Delta t < n\Delta t$ で、磁界の変化は小さいとして式 (2.39-a) の右辺の磁界を $(n-1/2)\Delta t$ の値で置き換え、 y に関する空間微分を Yee のアルゴリズムにしたがって離散化すると、

$$\varepsilon_0 \frac{\partial E_x}{\partial t} + \sigma_y E_x = \frac{1}{\Delta y} \left\{ H_z^{n-1/2}(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}) - H_z^{n-1/2}(i + \frac{1}{2}, j - \frac{1}{2}) \right\} \quad (2.61)$$

となる。右辺を定数とみなすと、これは E_x に関する 1 階線形微分方程式であるから、その解は、

$$E_x(i + \frac{1}{2}, j, t) = \frac{1}{\Delta y \sigma_y} \left\{ H_z^{n-1/2}(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}) - H_z^{n-1/2}(i + \frac{1}{2}, j - \frac{1}{2}) \right\} + C e^{-\frac{\sigma_y}{\varepsilon_0} t} \quad (2.62)$$

で与えられる。ただし、 C は任意定数である。

$t = (n-1)\Delta t$ において、 $E_x = E_x((n-1)\Delta t)$ を代入すると未知定数が定まり、

$$C = \left\{ E_x^{n-1}(i + \frac{1}{2}, j) - \frac{H_z^{n-1/2}(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}) - H_z^{n-1/2}(i + \frac{1}{2}, j - \frac{1}{2})}{\sigma_y \Delta y} \right\} e^{\frac{\sigma_y}{\varepsilon_0} (n-1)\Delta t} \quad (2.63)$$

となる。これを式 (2.62) に代入すると $t = n\Delta t$ の時の電界は

$$\begin{aligned} E_x^n(i + \frac{1}{2}, j) &= e^{-\frac{\sigma_y}{\varepsilon_0} \Delta t} E_x^{n-1}(i + \frac{1}{2}, j) \\ &+ \frac{1 - e^{-\frac{\sigma_y}{\varepsilon_0} \Delta t}}{\sigma_y \Delta y} \left\{ H_z^{n-1/2}(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}) - H_z^{n-1/2}(i + \frac{1}{2}, j - \frac{1}{2}) \right\} \end{aligned} \quad (2.64)$$

となる。ほかの成分も同様にできるから結果だけを示すと以下になる。

$$\begin{aligned} E_y^n(i, j + \frac{1}{2}) &= e^{-\frac{\sigma_x}{\varepsilon_0} \Delta t} E_y^{n-1}(i, j + \frac{1}{2}) \\ &- \frac{1 - e^{-\frac{\sigma_x}{\varepsilon_0} \Delta t}}{\sigma_x \Delta x} \left\{ H_z^{n-1/2}(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}) - H_z^{n-1/2}(i - \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}) \right\} \end{aligned} \quad (2.65)$$

$$\begin{aligned} H_{zx}^{n+1/2}(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}) &= e^{-\frac{\sigma_x^*}{\mu_0} \Delta t} H_{zx}^{n-1/2}(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}) \\ &- \frac{1 - e^{-\frac{\sigma_x^*}{\mu_0} \Delta t}}{\sigma_x^* \Delta x} \left\{ E_y^n(i + 1, j + \frac{1}{2}) - E_y^n(i, j + \frac{1}{2}) \right\} \end{aligned} \quad (2.66)$$

$$\begin{aligned} H_{zy}^{n+1/2}(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}) &= e^{-\frac{\sigma_y^*}{\mu_0} \Delta t} H_{zy}^{n-1/2}(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}) \\ &+ \frac{1 - e^{-\frac{\sigma_y^*}{\mu_0} \Delta t}}{\sigma_y^* \Delta y} \left\{ E_x^n(i + \frac{1}{2}, j + 1) - E_x^n(i + \frac{1}{2}, j) \right\} \end{aligned} \quad (2.67)$$

TM 波の PML

電界が z 方向成分の E_z だけで、磁界が x 、 y 方向成分の H_x 、 H_y を持つ TM 波の場合は、TE 波の場合の電界と磁界が入れ替わった場合とまったく同様に考えることができる。基本となる式は、

$$\varepsilon_0 \frac{\partial E_{zx}}{\partial t} + \sigma_x E_{zx} = \frac{\partial H_y}{\partial x} \quad (2.68a)$$

$$\varepsilon_0 \frac{\partial E_{zy}}{\partial t} + \sigma_y E_{zy} = -\frac{\partial H_x}{\partial y} \quad (2.68b)$$

$$\mu_0 \frac{\partial H_x}{\partial t} + \sigma_y^* H_x = -\frac{\partial E_z}{\partial y} \quad (2.69a)$$

$$\mu_0 \frac{\partial H_y}{\partial t} + \sigma_x^* H_y = \frac{\partial E_z}{\partial x} \quad (2.69b)$$

である。ただし、TM 波の場合、 E_z を

$$E_z = E_{zx} + E_{zy} \quad (2.70)$$

のように 2 つのサブコンポーネントに分ける。

式 (2.68)、式 (2.69) を TE 波の場合と同様に定式化すると、以下ようになる。

$$\begin{aligned} H_x^{n+1/2}(i, j + \frac{1}{2}) &= e^{-\frac{\sigma_y^*}{\mu_0} \Delta t} H_x^{n-1/2}(i, j + \frac{1}{2}) \\ &\quad - \frac{1 - e^{-\frac{\sigma_y^*}{\mu_0} \Delta t}}{\sigma_y^* \Delta y} \{E_z^n(i, j + 1) - E_z^n(i, j)\} \end{aligned} \quad (2.71)$$

$$\begin{aligned} H_y^{n+1/2}(i + \frac{1}{2}, j) &= e^{-\frac{\sigma_x^*}{\mu_0} \Delta t} H_y^{n-1/2}(i + \frac{1}{2}, j) \\ &\quad + \frac{1 - e^{-\frac{\sigma_x^*}{\mu_0} \Delta t}}{\sigma_x^* \Delta x} \{E_z^n(i + 1, j) - E_z^n(i, j)\} \end{aligned} \quad (2.72)$$

$$\begin{aligned} E_{zx}^n(i, j) &= e^{-\frac{\sigma_x}{\varepsilon_0} \Delta t} E_{zx}^{n-1}(i, j) \\ &\quad + \frac{1 - e^{-\frac{\sigma_x}{\varepsilon_0} \Delta t}}{\sigma_x \Delta x} \left\{ H_y^{n-1/2}(i + \frac{1}{2}, j) - H_y^{n-1/2}(i - \frac{1}{2}, j) \right\} \end{aligned} \quad (2.73)$$

$$\begin{aligned} E_{zy}^n(i, j) &= e^{-\frac{\sigma_y}{\varepsilon_0} \Delta t} E_{zy}^{n-1}(i, j) \\ &\quad - \frac{1 - e^{-\frac{\sigma_y}{\varepsilon_0} \Delta t}}{\sigma_y \Delta y} \left\{ H_z^{n-1/2}(i, j + \frac{1}{2}) - H_z^{n-1/2}(i, j - \frac{1}{2}) \right\} \end{aligned} \quad (2.74)$$

2.2.3 3 次元 PML

3 次元の場合は、前節で述べた TE 波と TM 波の合成であり、電界と磁界のすべての成分を次のように 2 つのサブコンポーネントに分ける。

$$E_x = E_{x_{xy}} + E_{x_{xz}} \quad (2.75a)$$

$$E_y = E_{y_{yz}} + E_{y_{yx}} \quad (2.75b)$$

$$E_z = E_{z_{zx}} + E_{z_{zy}} \quad (2.75c)$$

$$H_x = H_{x_{xy}} + H_{x_{xz}} \quad (2.76a)$$

$$H_y = H_{y_{yz}} + H_{y_{yx}} \quad (2.76b)$$

$$H_z = H_{z_{zx}} + H_{z_{zy}} \quad (2.76c)$$

このとき、PML 内部の基本式は 12 個となり

$$\varepsilon_0 \frac{\partial E_{xy}}{\partial t} + \sigma_y E_{xy} = \frac{\partial H_z}{\partial y} \quad (2.77a)$$

$$\varepsilon_0 \frac{\partial E_{xz}}{\partial t} + \sigma_z E_{xz} = -\frac{\partial H_y}{\partial z} \quad (2.77b)$$

$$\varepsilon_0 \frac{\partial E_{yz}}{\partial t} + \sigma_z E_{yz} = \frac{\partial H_x}{\partial z} \quad (2.78a)$$

$$\varepsilon_0 \frac{\partial E_{yx}}{\partial t} + \sigma_x E_{yx} = -\frac{\partial H_z}{\partial x} \quad (2.78b)$$

$$\varepsilon_0 \frac{\partial E_{zx}}{\partial t} + \sigma_x E_{zx} = \frac{\partial H_y}{\partial x} \quad (2.79a)$$

$$\varepsilon_0 \frac{\partial E_{zy}}{\partial t} + \sigma_y E_{zy} = -\frac{\partial H_x}{\partial y} \quad (2.79b)$$

$$\mu_0 \frac{\partial H_{xy}}{\partial t} + \sigma_y^* H_{xy} = \frac{\partial H_z}{\partial y} \quad (2.80a)$$

$$\mu_0 \frac{\partial H_{xz}}{\partial t} + \sigma_z^* H_{xz} = -\frac{\partial H_y}{\partial z} \quad (2.80b)$$

$$\mu_0 \frac{\partial H_{yz}}{\partial t} + \sigma_z^* H_{yz} = \frac{\partial H_x}{\partial z} \quad (2.81a)$$

$$\mu_0 \frac{\partial H_{yx}}{\partial t} + \sigma_x^* H_{yx} = -\frac{\partial H_z}{\partial x} \quad (2.81b)$$

$$\mu_0 \frac{\partial H_{zx}}{\partial t} + \sigma_x^* H_{zx} = \frac{\partial H_y}{\partial x} \quad (2.82a)$$

$$\mu_0 \frac{\partial H_{zy}}{\partial t} + \sigma_y^* H_{zy} = -\frac{\partial H_x}{\partial y} \quad (2.82b)$$

となる。マッチング条件は

$$\frac{\sigma_x}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma_x^*}{\mu_0}, \quad \frac{\sigma_y}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma_y^*}{\mu_0}, \quad \frac{\sigma_z}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma_z^*}{\mu_0} \quad (2.83)$$

である。ただし、 x 軸に垂直な面に対しては $\sigma_y = \sigma_z = 0$ 、 y 軸に垂直な面に対しては $\sigma_z = \sigma_x = 0$ 、 z 軸に垂直な面に対しては $\sigma_x = \sigma_y = 0$ である。さらに、導電率、磁気損失は

$$\sigma_x(i) = \begin{cases} \sigma_{\max} \left[\frac{L\Delta x - i\Delta x}{L\Delta x} \right]^M & ; i\Delta x < L\Delta x \\ 0 & ; L\Delta x < i\Delta x < (X_{\max} - L)\Delta x \\ \sigma_{\max} \left[\frac{i\Delta x - (X_{\max} - L)\Delta x}{L\Delta x} \right]^M & ; i\Delta x > (X_{\max} - L)\Delta x \end{cases} \quad (2.84a)$$

$$\sigma_y(j) = \begin{cases} \sigma_{\max} \left[\frac{L\Delta y - j\Delta y}{L\Delta y} \right]^M & ; j\Delta y < L\Delta y \\ 0 & ; L\Delta y < j\Delta y < (Y_{\max} - L)\Delta y \\ \sigma_{\max} \left[\frac{j\Delta y - (Y_{\max} - L)\Delta y}{L\Delta y} \right]^M & ; j\Delta y > (Y_{\max} - L)\Delta y \end{cases} \quad (2.84b)$$

$$\sigma_z(k) = \begin{cases} \sigma_{\max} \left[\frac{L\Delta z - k\Delta z}{L\Delta z} \right]^M & ; k\Delta z < L\Delta z \\ 0 & ; L\Delta z < k\Delta z < (Z_{\max} - L)\Delta z \\ \sigma_{\max} \left[\frac{k\Delta z - (Z_{\max} - L)\Delta z}{L\Delta z} \right]^M & ; k\Delta z > (Z_{\max} - L)\Delta z \end{cases} \quad (2.84c)$$

となる。

3次元のPML媒質内でのFDTD定式化

前節の3次元のPML媒質内での基本式を2次元TE波、TM波と同様に定式化を行と、

$$E_{xy}^n(i + \frac{1}{2}, j, k) = C_{ay}(j)E_{xy}^{n-1}(i + \frac{1}{2}, j, k) + C_{by}(j) \left\{ H_z^{n-1/2}(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}, k) - H_z^{n-1/2}(i + \frac{1}{2}, j - \frac{1}{2}, k) \right\} \quad (2.85a)$$

$$E_{xz}^n(i + \frac{1}{2}, j, k) = C_{az}(k)E_{xz}^{n-1}(i + \frac{1}{2}, j, k) - C_{bz}(k) \left\{ H_y^{n-1/2}(i + \frac{1}{2}, j, k + \frac{1}{2}) - H_y^{n-1/2}(i + \frac{1}{2}, j, k - \frac{1}{2}) \right\} \quad (2.85b)$$

$$E_{yz}^n(i, j + \frac{1}{2}, k) = C_{az}(k)E_{yz}^{n-1}(i, j + \frac{1}{2}, k) + C_{bz}(k) \left\{ H_x^{n-1/2}(i, j + \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}) - H_x^{n-1/2}(i, j + \frac{1}{2}, k - \frac{1}{2}) \right\} \quad (2.85c)$$

$$E_{yx}^n(i, j + \frac{1}{2}, k) = C_{ax}(i)E_{yx}^{n-1}(i, j + \frac{1}{2}, k) - C_{bx}(i) \left\{ H_z^{n-1/2}(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}, k) - H_z^{n-1/2}(i - \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}, k) \right\} \quad (2.85d)$$

$$E_{zx}^n(i, j, k + \frac{1}{2}) = C_{ax}(i)E_{zx}^{n-1}(i, j, k + \frac{1}{2}) + C_{bx}(i) \left\{ H_y^{n-1/2}(i + \frac{1}{2}, j, k + \frac{1}{2}) - H_y^{n-1/2}(i - \frac{1}{2}, j, k + \frac{1}{2}) \right\} \quad (2.85e)$$

$$E_{zy}^n(i, j, k + \frac{1}{2}) = C_{ay}(j)E_{zy}^{n-1}(i, j, k + \frac{1}{2}) - C_{by}(j) \left\{ H_x^{n-1/2}(i, j + \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}) - H_x^{n-1/2}(i, j - \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}) \right\} \quad (2.85f)$$

$$H_{xy}^n(i, j + \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}) = D_{ay}(j)H_{xy}^{n-1}(i, j + \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}) - D_{by}(j) \left\{ E_z^{n-1/2}(i, j + 1, k + \frac{1}{2}) - E_z^{n-1/2}(i, j, k + \frac{1}{2}) \right\} \quad (2.85g)$$

$$H_{xz}^n(i, j + \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}) = D_{az}(k)H_{xz}^{n-1}(i, j + \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}) + D_{bz}(k) \left\{ E_y^{n-1/2}(i, j + \frac{1}{2}, k + 1) - E_y^{n-1/2}(i, j + \frac{1}{2}, k) \right\} \quad (2.85h)$$

$$H_{yz}^n(i + \frac{1}{2}, j, k + \frac{1}{2}) = D_{az}(k)H_{yz}^{n-1}(i + \frac{1}{2}, j, k + \frac{1}{2}) - D_{bz}(k) \left\{ E_x^{n-1/2}(i + \frac{1}{2}, j, k + 1) - E_x^{n-1/2}(i + \frac{1}{2}, j, k) \right\} \quad (2.85i)$$

$$H_{yx}^n(i + \frac{1}{2}, j, k + \frac{1}{2}) = D_{ax}(i)H_{yx}^{n-1}(i + \frac{1}{2}, j, k + \frac{1}{2})$$

$$+D_{bx}(i) \left\{ E_z^{n-1/2}(i+1, j, k + \frac{1}{2}) - E_z^{n-1/2}(i, j, k + \frac{1}{2}) \right\} \quad (2.85j)$$

$$H_{zx}^n(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}, k) = D_{ax}(i)H_{zx}^{n-1}(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}, k) - D_{bx}(i) \left\{ E_y^{n-1/2}(i+1, j + \frac{1}{2}, k) - E_y^{n-1/2}(i, j + \frac{1}{2}, k) \right\} \quad (2.85k)$$

$$H_{zy}^n(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}, k) = D_{ay}(j)H_{zy}^{n-1}(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}, k) + D_{by}(j) \left\{ E_x^{n-1/2}(i + \frac{1}{2}, j+1, k) - E_x^{n-1/2}(i + \frac{1}{2}, j, k) \right\} \quad (2.85l)$$

が得られる。ただし、上式係数 C_{ax} 、 C_{bx} 、 C_{ay} 、 C_{by} 、 C_{az} 、 C_{bz} および D_{ax} 、 D_{bx} 、 D_{ay} 、 D_{by} 、 D_{az} 、 D_{bz} は、

$$C_{ax}(i) = e^{-\sigma_x(i)\Delta t/\varepsilon_0}, \quad C_{bx}(i) = \frac{1 - e^{-\sigma_x(i)\Delta t/\varepsilon_0}}{\sigma_x(i)\Delta x} \quad (2.86a)$$

$$C_{ay}(j) = e^{-\sigma_y(j)\Delta t/\varepsilon_0}, \quad C_{by}(j) = \frac{1 - e^{-\sigma_y(j)\Delta t/\varepsilon_0}}{\sigma_y(j)\Delta y} \quad (2.86b)$$

$$C_{az}(k) = e^{-\sigma_z(k)\Delta t/\varepsilon_0}, \quad C_{bz}(k) = \frac{1 - e^{-\sigma_z(k)\Delta t/\varepsilon_0}}{\sigma_z(k)\Delta z} \quad (2.86c)$$

$$D_{ax}(i) = e^{-\sigma_x^*(i)\Delta t/\varepsilon_0}, \quad D_{bx}(i) = \frac{1 - e^{-\sigma_x^*(i)\Delta t/\varepsilon_0}}{\sigma_x^*(i)\Delta x} \quad (2.86d)$$

$$D_{ay}(j) = e^{-\sigma_y^*(j)\Delta t/\varepsilon_0}, \quad D_{by}(j) = \frac{1 - e^{-\sigma_y^*(j)\Delta t/\varepsilon_0}}{\sigma_y^*(j)\Delta y} \quad (2.86e)$$

$$D_{az}(k) = e^{-\sigma_z^*(k)\Delta t/\varepsilon_0}, \quad D_{bz}(k) = \frac{1 - e^{-\sigma_z^*(k)\Delta t/\varepsilon_0}}{\sigma_z^*(k)\Delta z} \quad (2.86f)$$

である。

PML の特徴

図 2.9 に PML 領域付近の波の伝搬の様子を示す。PML 領域内では、波は境界面に対して垂直な方向に進む平面波と、平行な方向に進む平面波に分離される。境界面に垂直な方向に進む波は、導体損失あるいは磁気損失で減衰するが、境界面に平行な方向に進む平面波は、真空中と同じように減衰すること無く伝搬する。すなわち、図に示すように、PML 領域に斜め入射した波は、境界面に垂直な方向に進む波の成分のみが減衰するため、角に向かって曲がりながら PML 領域を伝搬する。さらに、PML 領域の角においては、境界面に平行な方向に進む平面波が、導体損失あるいは磁気損失で減衰する。PML 領域の外側端部は電気壁になっているため、PML 領域の端部に到達した波は完全反射する。反射した波は、さらに PML 領域で減衰する。

2.2.4 例題

図 2.10、2.11 に示すような条件で波の伝搬の様子を観測せよ。

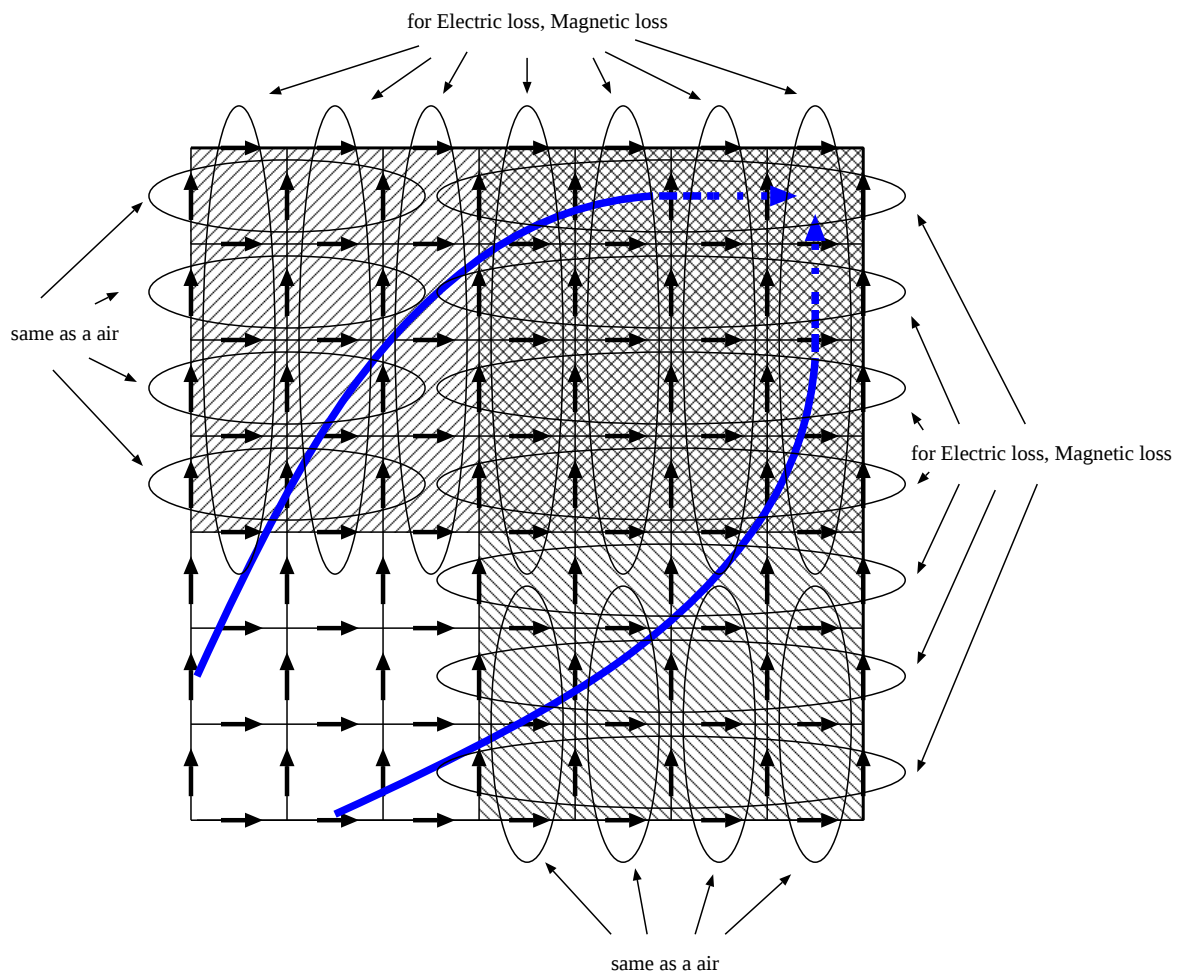


図 2.9: PML 領域内の電波伝搬

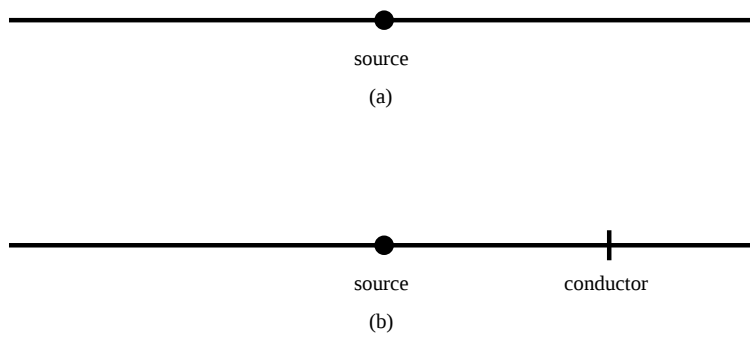


図 2.10: 例題 1 (1 次元)

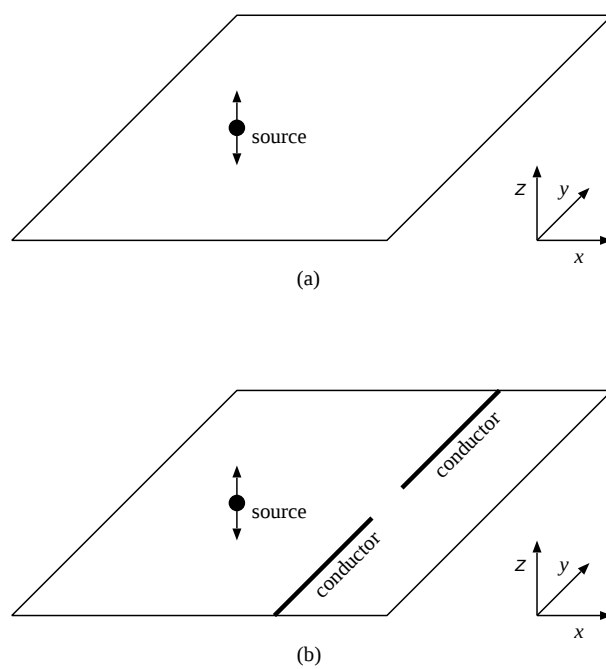


图 2.11: 例題 2 (2 次元)

★ MEMO ★

第3章 フーリエ解析

3.1 フーリエ級数

繰り返し信号を時間の周期 T の関数 $f(t)$ とすると、フーリエ (Fourier) 級数は

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega_0 t + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\omega_0 t \quad (3.1)$$

と表現できる。ここに、係数 a_n 、 b_n ($n \geq 1$) は

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} f(t) \cos n\omega_0 t dt \quad (3.2)$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} f(t) \sin n\omega_0 t dt \quad (3.3)$$

で与えられる。また、角周波数は、 $\omega_0 = 2\pi/T$ となる。係数 a_0 は直流成分を表し、周期 T における $f(t)$ の平均値

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} f(t) dt \quad (3.4)$$

となる。

3.2 複素形式

周期関数 $f(t)$ のもう一つの表示方法として複素形式の表現方法がある。複素数の関係式

$$\cos n\omega_0 t = \frac{e^{jn\omega_0 t} + e^{-jn\omega_0 t}}{2} \quad (3.5)$$

$$\sin n\omega_0 t = \frac{e^{jn\omega_0 t} - e^{-jn\omega_0 t}}{2j} \quad (3.6)$$

をフーリエ級数に代入して

$$f(t) = a_0 + \sum_1^{\infty} a_n \left(\frac{e^{jn\omega_0 t} + e^{-jn\omega_0 t}}{2} \right) + \sum_1^{\infty} b_n \left(\frac{e^{jn\omega_0 t} - e^{-jn\omega_0 t}}{2j} \right) \quad (3.7)$$

$$= a_0 + \sum_1^{\infty} \left\{ \frac{(a_n - jb_n)e^{jn\omega_0 t}}{2} + \frac{(a_n + jb_n)e^{-jn\omega_0 t}}{2} \right\} \quad (3.8)$$

ここで、

$$C_n = \frac{1}{2}(a_n - jb_n) \quad (3.9)$$

$$C_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + jb_n) \quad (3.10)$$

$$C_0 = a_0 \quad (3.11)$$

とおく。この時 C_{-n} は C_n の複素共役になる。前節に示した係数 a_n 、 b_n の表現式を代入すると、

$$C_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} f(t) [\cos n\omega_0 t - j \sin n\omega_0 t] dt \quad (3.12)$$

$$C_{-n} = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} f(t) [\cos n\omega_0 t + j \sin n\omega_0 t] dt \quad (3.13)$$

となる。これらの式を整理して

$$C_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \quad (3.14)$$

$$C_{-n} = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} f(t) e^{jn\omega_0 t} dt \quad (3.15)$$

したがって、関数 $f(t)$ は

$$f(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{jn\omega_0 t} + \sum_{n=-\infty}^{-1} C_n e^{jn\omega_0 t} \quad (3.16)$$

となる。ここで、最後の総和は n の値が負であり、 $n = 0$ の場合も総和の中へ入れることができ

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{jn\omega_0 t} \quad (3.17)$$

となる。

3.3 フーリエ変換

フーリエ変換は、フーリエ級数展開において、 $T \rightarrow \infty$ として孤立波形、過渡波形などの非周期波形の場合へ拡張できる。

最初、 $f(t)$ を周期波形であると仮定すると、

$$C_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \quad (3.18)$$

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{jn\omega_0 t} \quad (3.19)$$

となる。極限操作によって

$$T \rightarrow \infty \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T} \rightarrow d\omega \quad \frac{1}{T} = \frac{\omega_0}{2\pi} \rightarrow \frac{d\omega}{2\pi} \quad (3.20)$$

となる。さらに、フーリエ級数の第 n 次高調波 $n\omega_0$ は、 $n\omega_0 \rightarrow n d\omega$ となる。これを変数 ω とする。

極限的には、総和を積分にかえると次式が得られる。

$$C_n = \frac{d\omega}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \quad (3.21)$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \right\} e^{j\omega t} d\omega \quad (3.22)$$

上式の $\{ \}$ 内の計算値は周波数の関数となる。これを、

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \quad (3.23)$$

と書き、 $f(t)$ のフーリエ変換 (Fourier transform) と言う。 $f(t)$ に上式を代入して

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (3.24)$$

を得る。これを逆フーリエ変換 (inverse Fourier transform) と呼ぶ。

3.3.1 フーリエ変換の性質

フーリエ変換には以下の表に揚げるような性質がある。周期波形をフーリエ変換すると離散スペクトルに、離散波形をフーリエ変換すると繰り返しスペクトル (周期的スペクトル) になる。有限時間の波形をフーリエ変換、または有限時間でフーリエ変換すると、有限のスペクトルが得られる。関係式は、本節終了後、各自求めること。

表 3.1: フーリエ変換の性質

時間領域データ	周波数領域データ
周期波形	離散スペクトル
離散波形	繰り返しスペクトル
有限時間波形	有限スペクトル

3.4 離散フーリエ変換 (DFT)

連続信号 $y(t)$ を標本化して得られる有限時間信号のフーリエ変換を考える。図 3.1(a) に信号 $y(t)$ を T_s 秒間隔で N 個の標本化を行って得られる長さ NT の系列を示す。また、図 3.1(b) に標本信号 $s(t)$ を示す。

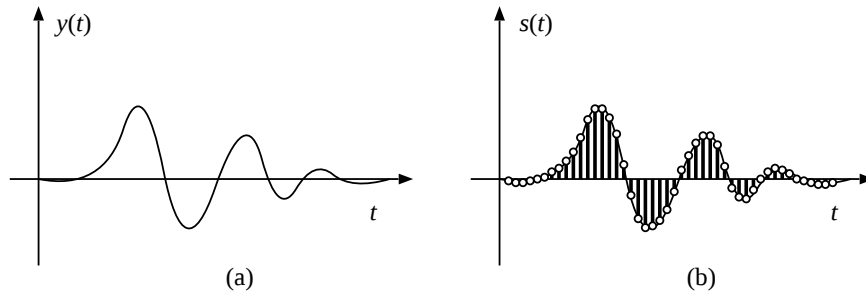


図 3.1: 連続信号と標本化

標本値 $f(nT_s)$ 、 $n = 0, 1, 2, 3, \dots, N-1$ はデルタ関数 $\delta(t)$ を用いて

$$s(t) = \sum_{n=0}^{N-1} f(nT_s) \delta(t - nT_s) \quad (3.25)$$

と大きさ $f(nT_s)$ を持つインパルス列 (デルタ関数列) で表現できる。

この離散信号は、間隔 Ω で N 個の周波数成分から成るスペクトルを持つと仮定すると、

$$N\Omega = \frac{2\pi}{T_s} \quad (3.26)$$

であるので、

$$\Omega = \frac{2\pi}{NT_s} \quad (3.27)$$

となる。

$f(nT_s)$ のフーリエ変換を $F(\omega)$ とおくと、

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} s(t)e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{n=0}^{N-1} f(nT_s)\delta(t - nT_s)e^{-j\omega t} dt \end{aligned} \quad (3.28)$$

を得る。ここで、 $\omega = m\Omega$ 、 $m = 0, 1, 2, 3, \dots, N-1$ とおくと

$$F(m\Omega) = \sum_{n=0}^{N-1} f(nT_s) \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_s)e^{-jm\Omega t} dt \quad (3.29)$$

となる。上式の積分は nT_s の時間遅れを持つインパルスのフーリエ変換である。推移定理によって、これは $e^{-jn\omega T}$ となる。したがって、

$$F(m\Omega) = \sum_{n=0}^{N-1} f(nT_s)e^{-jmn\Omega T} = \sum_{n=0}^{N-1} f(nT_s)e^{-j(2\pi/N)mn} \quad (3.30)$$

となり、これを N 個の標本値 $f(nT_s)$ の離散フーリエ変換 (discrete Fourier transform) という。また、逆離散フーリエ変換 (inverse discrete Fourier transform) は、

$$f(nT_s) = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} F(m\Omega)e^{j(2\pi/N)mn} \quad (3.31)$$

となる。

3.4.1 離散フーリエ変換の性質

線形性 (linearity)

任意の定数 a 、 b に対して、

$$f(nT_s) = af_1(nT_s) + bf_2(nT_s) \quad (3.32)$$

なる信号があるとする、その DFT は

$$F(m\Omega) = \mathcal{F}[f(nT_s)] = aF_1(m\Omega) + bF_2(m\Omega) \quad (3.33)$$

と求められる。

周期性 (periodicity)

r を任意の整数とすると

$$F(m\Omega + rN\Omega) = F(m\Omega) \quad (3.34)$$

が成り立ち、 $F(\omega)$ は周期関数である。なぜなら、

$$F(m\Omega + rN\Omega) = \sum_{n=0}^{N-1} f(nT_s)e^{-j(m\Omega + rN\Omega)nT_s} = \sum_{n=0}^{N-1} f(nT_s)e^{-jm\Omega nT_s}e^{-j2\pi rn} = \sum_{n=0}^{N-1} f(nT_s)e^{-jmn\Omega T} \quad (3.35)$$

となり周波数成分は N 個 (角周波数 $N\Omega$) ごとに繰り返すことがわかる。

対称性 (symmetry)

離散フーリエ変換では

$$F(N\Omega - m\Omega) = F^*(m\Omega) \quad (3.36)$$

が成り立ち、対称性を有する。ただし、 $F^*(m\Omega)$ は $F(m\Omega)$ の共役複素数である。なぜなら、

$$F(N\Omega - m\Omega) = \sum_{n=0}^{N-1} f(nT_s) e^{-j(N\Omega - m\Omega)nT_s} = \sum_{n=0}^{N-1} f(nT_s) e^{jm\Omega nT_s} e^{-j2\pi n} = \left[\sum_{n=0}^{N-1} f(nT_s) e^{-jmn\Omega T} \right]^* \quad (3.37)$$

となり $\frac{N-1}{2}\Omega$ 以降の成分はこれ以前の成分と鏡像関係にある。

サンプリング定理

連続信号のスペクトルが図 3.2(a) のようになるとする。離散フーリエ変換の周期性と対称性によりスペクトルは $\omega_{\max} < (N/2)\Omega$ 、 $\omega_{\max} = (N/2)\Omega$ 、 $\omega_{\max} > (N/2)\Omega$ の場合にそれぞれ、図 3.2(b) ~ (d) のようになる。

ここで、連続信号のスペクトルの最高角周波数を $\omega_{\max}$ とすると、 $\omega_{\max} < (N/2)\Omega$ 、 $\omega_{\max} = (N/2)\Omega$ の場合、図 3.2(b)、(c) のようになり正確にスペクトルを求める事ができる。しかし、 $\omega_{\max} > (N/2)\Omega$ の場合、スペクトルは図 3.2(d) のように重なり (aliasing) を生じ、 $(N/2)\Omega$ 付近の角周波数で正確にスペクトルを求める事ができない。

このように、周波数成分を損なわないようにサンプルするためには $\omega_{\max} \leq (N/2)\Omega$ の条件が必要である。あるいは、もとの信号の最高周波数が $f_{\max}(= \omega_{\max}/2\pi)$ の場合、サンプリング時間 T は $T \leq \frac{1}{2f_{\max}}$ としなければならない。これをサンプリング定理 (標本化定理) と呼ぶ。このとき、 $\frac{1}{2T_s}$ をナイキスト周波数 (ナイキスト速度)、 $\frac{1}{2f_{\max}}$ をナイキスト間隔と呼ぶ。

推移定理

時間関数 $f(t)$ を τ_0 だけずらした関数のフーリエ変換は、もとの関数のフーリエ変換の位相特性を $e^{-j\omega\tau_0}$ だけ推移させたものに等しい。 $f(t)$ のフーリエ変換を $F_1(\omega)$ 、 $f(t - \tau_0)$ のフーリエ変換を $F_2(\omega)$ とおく、すなわち

$$F_2(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t - \tau_0) e^{-j\omega t} dt \quad (3.38)$$

となる。 $t' = t - \tau_0$ とすると、

$$F_2(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t') e^{-j\omega t'} e^{-j\omega\tau_0} dt \quad (3.39)$$

$dt = dt'$ なので

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t') e^{-j\omega t'} dt' \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt = F_1(\omega) \quad (3.40)$$

が成り立ち、

$$F_2(\omega) = F_1(\omega) e^{-j\omega\tau_0} \quad (3.41)$$

が得られる。

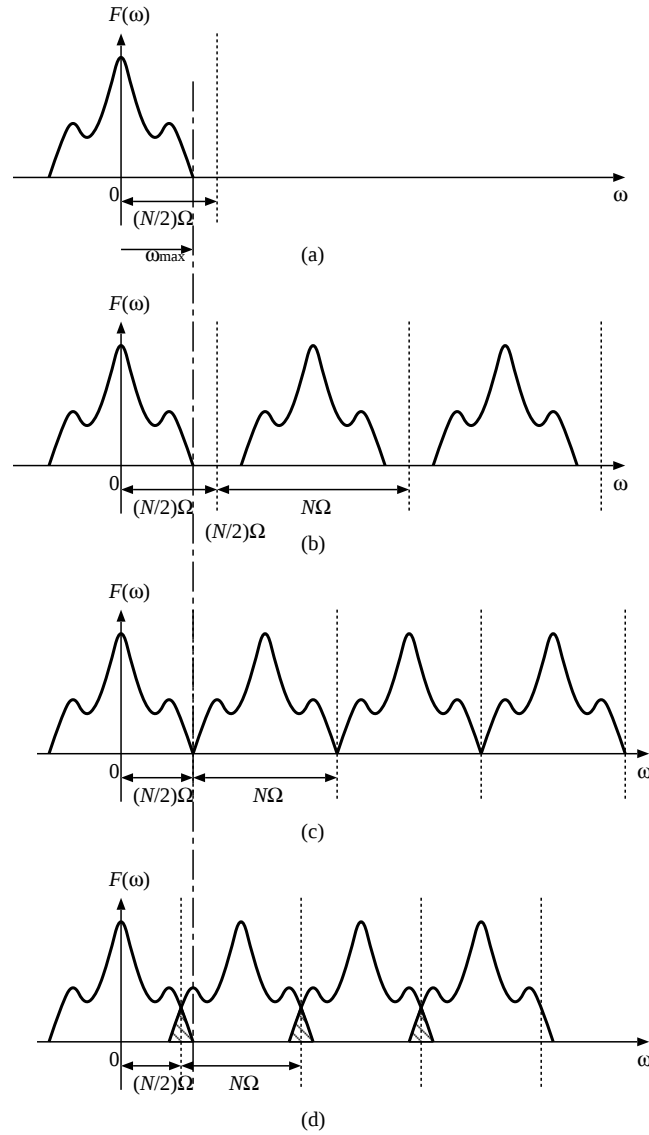


図 3.2: 離散信号のスペクトル

また、時間関数 $f(t)$ に $e^{-j\omega_s t}$ を掛けた関数のフーリエ変換は、もとの関数のフーリエ変換の周波数特性を ω_s だけ推移させたものに等しい。 $f(t)$ のフーリエ変換を $F_1(\omega)$ 、 $f(t)e^{-j\omega_s t}$ のフーリエ変換を $F_2(\omega)$ とおく、すなわち

$$\begin{aligned} F_2(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega_s t}e^{-j\omega t}dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j(\omega+\omega_s)t}dt \end{aligned} \quad (3.42)$$

となる。 $\omega' = (\omega + \omega_s)$ とすると、

$$F_2(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega' t}dt = F_1(\omega') \quad (3.43)$$

となるので

$$F_2(\omega) = F_1(\omega + \omega_s) \quad (3.44)$$

が得られる。

3.5 FDTD 法への適用

高周波回路やアンテナの解析は、一般的に周波数領域で行われる。FDTD 法では、計算データが時間領域の離散値であるため、離散フーリエ変換 (DFT) で周波数領域の値を求める必要がある。離散フーリエ変換において、FDTD 法における時間ステップ Δt が、サンプリング間隔に、解析周波数分解能 ω_r が周波数間隔に相当するため、解析周波数分解能は時間ステップ Δt と有限解析ステップ数 N で次式のように決定される。

$$\omega_r = \frac{2\pi}{N\Delta t} \quad (3.45)$$

即ち、時間ステップ Δt は、安定条件を満たすようにセルサイズ $(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$ より求まるため、解析周波数分解能 ω_r はセルサイズに依存する。

解析対称をより正確に表すために、セルサイズをより小さく選ぶと、安定条件により時間ステップ Δt が小さくなり、それにより解析周波数分解能 ω_r が大きくなる。十分な解析周波数分解能を得るために、ステップ数 N を多くとることになる。3次元の場合、セルサイズを半分にするとセル数が 2^3 倍に、時間ステップ Δt が $1/2$ になるため、同じ分解能を得るためには、ステップ数 N が 2 倍にする必要がある。そのため、電磁界計算に要する時間が $2^3 \times 2$ 倍になる。

そこで、計算時間の短縮について検討する。FDTD 計算中の観測点の電磁界の時間領域の値を $f(n\Delta t)$ とし、解析周波数分解能 ω_r を得るためには、式 (3.45) より、 N ステップまで、計算する必要があり、角周波数 ω における周波数領域の値 $F(m\Omega)$ は、

$$F(m\Omega) = \sum_{n=0}^N f(n\Delta t) e^{-j\omega n\Delta t} \quad (3.46)$$

となる。観測点の電磁界の時間領域の値が f_c 、時間ステップ N_c で収束したと仮定すると、角周波数 ω における周波数領域の値 $F(m\Omega)$ は、

$$F(m\Omega) = \sum_{n=0}^{N_c} f(nT_s) e^{-j(2\pi/N)mn} + f_c \sum_{n=N_c+1}^{N-1} e^{-j(2\pi/N)mn} \quad (3.47)$$

とすることができる。即ち、収束するまで上式右辺第 1 項で計算を行い、収束後は第 2 項を解析的に解けば、収束後の計算時間を短縮して十分な周波数分解能を得ることができる。ただし、この方法ではにフーリエ変換が収束値 f_c に依存するので、収束値 f_c の見極めが重要 になる。

★ MEMO ★

第4章 マイクロ波回路とアンテナ解析への応用

4.1 マイクロストリップ線路の解析

図 4.1 にマイクロストリップ線路の解析モデル図を示す。線路の端面を吸収境界面とを合わせることで、無限長線路として解析する。

4.1.1 励振方法

マイクロストリップ線路の励振方法として、図 4.1 の source 面において、ストリップ導体直下の E_z 成分のみをガウス型パルスで均一に励振する方法がある。励振面の近傍における電磁界の分布は、実際にストリップ線路を伝搬するパルスの電磁界分布とは多少異なるが、観測点を励振面から少し離れた位置にすれば、マイクロストリップ線路のドミナント伝搬モードに対応した安定な真の電磁界分布が得られる。ただし、ガウス型パ

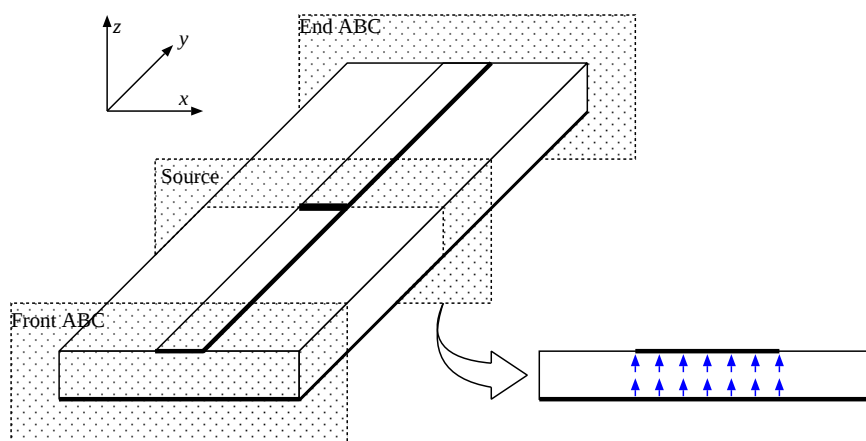


図 4.1: マイクロストリップ線路の励振方法

ルスで励振する場合、注意が必要である。励振面において、式 (1.77) の励振信号を

$$E_z^n(i, j, k) = Ae^{-\{(\Delta tn - T)/0.29T\}^2} \quad (4.1)$$

とすると、ある一定時間経つと $E_z = 0$ になる。これは、励振部分を局所的に電気壁にすることになる (ハードソース)。そこで、

$$E_z^n(i, j, k) = E_z^{n-1} + \frac{\Delta t}{\varepsilon \Delta x \Delta y} \nabla \times \mathbf{H}^{n+\frac{1}{2}}(i, j, k) + Ae^{-\{(\Delta tn - T)/0.29T\}^2} \quad (4.2)$$

のように選ぶことによって、励振信号がゼロになった後は通常の FDTD の差分式を適用することになる (ソフトソース)。

4.1.2 特性インピーダンス

マイクロストリップ線路を始め全ての伝送線路で最も基本的なパラメータの一つは、特性インピーダンスである。特性インピーダンス Z_0 は、線路上の電圧 V と電流 I の比で定義される。FDTD 法では、線路上の電圧と電流を、電界と磁界を次式のように積分して求める。

$$V(y, t) = - \int_{C_v} E(y, t) \cdot d\ell \quad (4.3a)$$

$$I(y, t) = \oint_{C_i} H(y, t) \cdot d\ell \quad (4.3b)$$

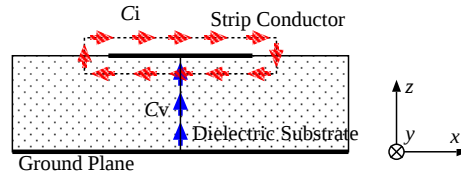


図 4.2: マイクロストリップ線路の特性インピーダンスの計算方法

図 4.2 は、マイクロストリップ線路の場合について、式 (4.85) 中の積分経路 C_v と C_i を示す。実際に FDTD 法では、電界、磁界は離散化した Yee メッシュ上に存在するので、積分も積分経路 C_v と C_i 上で各成分の和を求めることになる。

線路の特性インピーダンス Z_0 は、式 (4.85) で得られた電圧電流に対しフーリエ変換を行い、次式によって求まる。

$$Z_0 = \frac{\mathcal{F}[V(y, t)]}{\mathcal{F}[I(y, t)]} \quad (4.4)$$

ただし、 $\mathcal{F}$ はフーリエ変換演算を表している。

FDTD 法では、Yee メッシュにおいて電界・磁界の成分が、時間と空間において半ステップだけずれている。そのため、式 (4.4) には上記の要因による誤差が含まれる。空間的なずれについては、電界あるいは磁界について幾何学的平均値をとり補正し、時間的なずれに対しては、位相ファクター $e^{-j\omega\Delta t/2}$ を持って補正する方法がある。

4.1.3 伝搬定数

マイクロストリップ線路のもう一つの重要なパラメータは、線路における電磁波の伝搬定数である。特に、マイクロストリップ線路は誘電体と空気の2種類の媒質から構成されている不均一な構造であるので、この伝搬定数が周波数に依存する分散特性を持つ。この周波数分散特性により、マイクロストリップ線路に沿って伝搬する波は波形歪みを受けることになる。

線路に沿って、 $y = y_1$ と $y = y_2$ の2箇所 で電界成分 E_z (または、磁界成分。あるいは、式 (4.85) で得られた電圧、電流) に対して、それぞれ次式のようにフーリエ変換を行い

$$E_z(y_1, \omega) = \mathcal{F}[E_z(y_1, t)] \quad (4.5a)$$

$$E_z(y_2, \omega) = \mathcal{F}[E_z(y_2, t)] \quad (4.5b)$$

式 (4.5) の (a) と (b) の比は、 $y = y_1$ と $y = y_2$ の間のマイクロストリップ線路の伝達関数に相当し、次のように記述できる。

$$e^{-\gamma(\omega)(y_2 - y_1)} = \frac{E_z(y_2, \omega)}{E_z(y_1, \omega)} = \frac{|E_{y2}|}{|E_{y1}|} e^{j(\theta_2 - \theta_1)} \quad (4.6)$$

ここで、 $\gamma(\omega)$ は一般的に次のような複素数

$$\gamma(\omega) = \alpha(\omega) + j\beta(\omega) \quad (4.7)$$

として求めなければならないが、線路の全ての損失が無視できる場合には、 $|E_{y1}| = |E_{y2}|$ 、 $\alpha(\omega) = 0$ 。よって、マイクロストリップ線路の伝搬定数 β を次のように求められる。

$$\beta(\omega) = \frac{\theta_1 - \theta_2}{y_2 - y_1} \quad (4.8)$$

また、実際の設計においては、伝搬定数 β の他に線路の実効誘電率 ε_{eff} も良く用いられる。 ε_{eff} と β は

$$\varepsilon_{\text{eff}} = \left(\frac{\beta(\omega)}{\beta_0} \right)^2 \quad (4.9)$$

ただし、 $\beta_0 = \omega/c$ 、 $\omega = 2\pi f$ 、 c は真空中の光速である。

上記方法により求めた伝搬定数の計算精度を保証するためには、 $y = y_1$ と $y = y_2$ の位置は励振面から十分にはなれて、電磁界分布が線路上の定常的な分布になっている所を選ぶ必要がある。また、吸収境界面からの不要反射が、搬定数の計算に影響を与えるので、十分な吸収境界条件を選ばなければならない。

4.1.4 コプレーナ線路の解析

コプレーナ線路の解析を FDTD 法で行う場合、適切な信号励振方法を考えなければならない。図 4.3 は一般的に用いられている励振方法で、コプレーナ線路の左右の二つのスロットにおける電界の E_x 成分のみに対して、同振幅で逆位相のガウス型パルスで均一的に励振を行う方法である。ただし、この近似的な励振方法では、励振源における電磁界の分布はコプレーナ線路が持つ固有伝搬モードとの不整合が生じるので、それによって、不要な表面波が発生する可能性がある。

対策の一つとして、使用する誘電体基板に対して、励振パルスの幅を適当に選び、そのスペクトルの成分が TE_0 モードの遮断周波数以下にすることがあげられる。

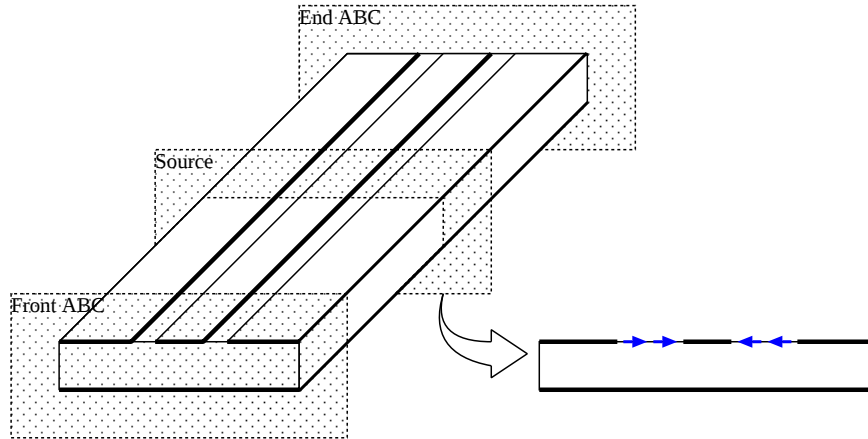


図 4.3: コプレーナ線路の励振方法

4.2 マイクロ波回路の散乱特性

マイクロ波回路の特性を表すために、回路の各入出力端 (ポート) について定義した S パラメータが最も良く用いられる。一般的なマルチポート・ネットワークに対して、各ポートの S パラメータは次のように求められる。

$$S_{mn} = \frac{\mathcal{F}[V_m(t)]}{\mathcal{F}[V_n(t)]} \sqrt{\frac{Z_{0n}}{Z_{0m}}} \quad (4.10)$$

ただし、 $V_m(t)$ と $V_n(t)$ はそれぞれのポート m 、 n における電圧で、 Z_{0m} と Z_{0n} はそれぞれのポートに接続された伝送線路の特性インピーダンスである。各ポートに接続されている伝送路が、マイクロストリップ線路の場合、ストリップ導体の直下の電界垂直成分を $V_m(t)$ と $V_n(t)$ に対応させる。

実際のマイクロ波回路では、特性インピーダンスは全て 50Ω であるので、

$$S_{mn} = \frac{\mathcal{F}[V_m(t)]}{\mathcal{F}[V_n(t)]} \quad (4.11)$$

と簡略化することができる。

また、 $m = n$ の場合には、 S_{mm} はポート m の観測点における反射係数 (リターンロス) を表すことになる。

$$S_{mm} = \frac{\mathcal{F}[V_{m-\text{ref}}(t)]}{\mathcal{F}[V_{m-\text{inc}}(t)]} \quad (4.12)$$

ただし、 $V_{m-\text{ref}}(t)$ と $V_{m-\text{inc}}(t)$ はそれぞれのポート m における反射信号と入力信号の電圧である。

図 4.4 に二つのポートを有するマイクロ波回路の一般的な構成を示す。この 2 ポート回路の S パラメータは

$$S_{11} = \frac{\mathcal{F}[V_{1-\text{ref}}(t)]}{\mathcal{F}[V_{1-\text{inc}}(t)]} \quad (4.13a)$$

$$S_{22} = \frac{\mathcal{F}[V_{2-\text{ref}}(t)]}{\mathcal{F}[V_{2-\text{inc}}(t)]} \quad (4.13b)$$

$$S_{21} = \frac{\mathcal{F}[V_{2-\text{trans}}(t)]}{\mathcal{F}[V_{1-\text{inc}}(t)]} \sqrt{\frac{Z_{01}}{Z_{02}}} \quad (4.13c)$$

$$S_{12} = S_{21} \quad (4.13d)$$

となる。

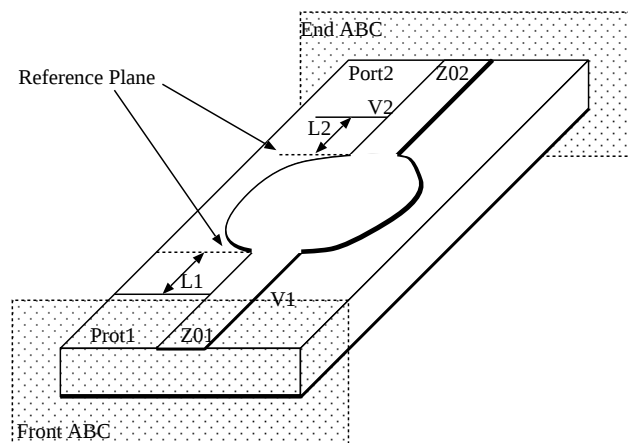


図 4.4: マイクロ波回路の S パラメータ

ただし、各 S パラメータの位相を求めるためには、位相の参照面 (Reference Plane) を指定する必要がある、一般には各ポートに接続される伝送線路の端面を参照面に定義する。一方 FDTD 法では、不連続部での影響

を避けるために、各ポートにおける信号の観測点を不連続部分から離れた所に選ぶのが望ましい。したがって、参照面における S パラメータを求めるためには、観測点で得られた結果に対し変換を行う必要がある。図 4.4 のように、ポート 1 とポート 2 の参照面と観測点との距離を L_1 、 L_2 とするとき、式 (4.13) で求められた S パラメータに対し、参照面での S パラメータへ次式により変換できる。

$$S_{11} = \frac{\mathcal{F}[V_{1-\text{ref}}(t)]}{\mathcal{F}[V_{1-\text{inc}}(t)]} e^{2\gamma_1 L_1} \quad (4.14a)$$

$$S_{22} = \frac{\mathcal{F}[V_{2-\text{ref}}(t)]}{\mathcal{F}[V_{2-\text{inc}}(t)]} e^{2\gamma_2 L_2} \quad (4.14b)$$

$$S_{21} = \frac{\mathcal{F}[V_{2-\text{trans}}(t)]}{\mathcal{F}[V_{1-\text{inc}}(t)]} \sqrt{\frac{Z_{01}}{Z_{02}}} e^{(2\gamma_1 L_1 + 2\gamma_2 L_2)} \quad (4.14c)$$

$$S_{12} = S_{21} \quad (4.14d)$$

ただし、 γ_1 、 γ_2 はポート 1 とポート 2 に接続されている伝送線路の伝搬定数である。線路の損失が無視できる場合、 $\gamma_i = j\beta_i$ ($i = 1, 2$) となる。

一方実際に、各ポートにおける S パラメータを求める場合、観測点での進行波と反射波を分離する必要がある。この場合、まず、線路のみの構造（無反射）に対して計算を行い、観測点における信号を求める。つぎに、実際の回路構造で計算を行う。この時得られたポート 1 での信号は $V_{1-\text{ref}}(t) + V_{1-\text{inc}}(t)$ に相当するものであるので、最初の計算で得られた進行波信号 $V_{1-\text{inc}}(t)$ を用いて簡単な差引計算を行えば、反射は信号 $V_{1-\text{ref}}(t)$ が得られる。

4.3 アンテナの解析

アンテナの特性は主に入力インピーダンスと指向性で評価されることが多く、アンテナの設計においては、重要なパラメータとなる。入力インピーダンスは、アンテナと送受信器の間の変換効率を表し、指向性は遠方の電磁界の伝搬特性を決めることになる。

4.3.1 ダイポールアンテナの入力インピーダンス

図 4.5 にダイポールアンテナの解析モデルを示す。アンテナの導体部は、Yee セルに対応した電界成分をゼロにすることで、表現する。図 4.5 場合は、アンテナに沿った E_z 成分をゼロにしている。ここでは、デルタギャップ給電法を用いる。すなはち、 $V(t)$ を給電電圧としたとき、図 4.5 に示すようにアンテナの給電部における電界成分 $E_z(i_f, j_f, k_f + 1/2)$ を

$$E_z^n(i_f, j_f, k_f + \frac{1}{2}) = -\frac{V(n\Delta t)}{\Delta z} \quad (4.15)$$

によって与える給電方法である。

給電電流 $I(t)$ は、図 4.5 の磁界の閉回路にアンペアの法則

$$I(t) = \oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} \quad (4.16)$$

を適応して

$$\begin{aligned} I\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)\Delta t\right) &= \left\{ H_x^{n+\frac{1}{2}}\left(i_f, j_f - \frac{1}{2}, k_f + \frac{1}{2}\right) - H_x^{n+\frac{1}{2}}\left(i_f, j_f + \frac{1}{2}, k_f + \frac{1}{2}\right) \right\} \Delta x \\ &+ \left\{ H_y^{n+\frac{1}{2}}\left(i_f, j_f + \frac{1}{2}, k_f + \frac{1}{2}\right) - H_y^{n+\frac{1}{2}}\left(i_f, j_f - \frac{1}{2}, k_f + \frac{1}{2}\right) \right\} \Delta y \end{aligned} \quad (4.17)$$

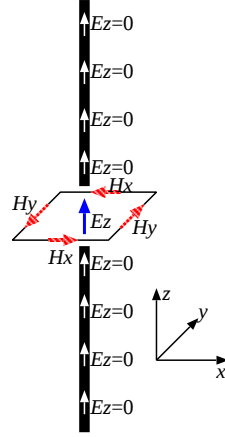


図 4.5: ダイポールアンテナ

より求められる。しかしこの場合、給電電圧の励振にパルス波形を用いると、一定時間後に給電電圧がゼロになり、それに対応した電界成分もゼロになり、アンテナの境界条件が変化することになる。

そこで、強制電流源 J を含むマクスウェル式 1.7 の差分化し定式化すると、式 (1.58)、式 (1.59)、式 1.60 より

$$\begin{aligned}
 E_x^{n+1}(i + \frac{1}{2}, j, k) &= E_x^n(i + \frac{1}{2}, j, k) \\
 &+ \frac{\Delta t}{\varepsilon \Delta y} \left\{ H_z^{n+\frac{1}{2}}(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}, k) - H_z^{n+\frac{1}{2}}(i + \frac{1}{2}, j - \frac{1}{2}, k) \right\} \\
 &- \frac{\Delta t}{\varepsilon \Delta z} \left\{ H_y^{n+\frac{1}{2}}(i + \frac{1}{2}, j, k + \frac{1}{2}) - H_y^{n+\frac{1}{2}}(i + \frac{1}{2}, j, k - \frac{1}{2}) \right\} \\
 &- \frac{\Delta t}{\varepsilon} J_x^{n+\frac{1}{2}}
 \end{aligned} \tag{4.18}$$

$$\begin{aligned}
 E_y^{n+1}(i, j + \frac{1}{2}, k) &= E_y^n(i, j + \frac{1}{2}, k) \\
 &+ \frac{\Delta t}{\varepsilon \Delta z} \left\{ H_x^{n+\frac{1}{2}}(i, j + \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}) - H_x^{n+\frac{1}{2}}(i, j + \frac{1}{2}, k - \frac{1}{2}) \right\} \\
 &- \frac{\Delta t}{\varepsilon \Delta x} \left\{ H_z^{n+\frac{1}{2}}(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}, k) - H_z^{n+\frac{1}{2}}(i - \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}, k) \right\} \\
 &- \frac{\Delta t}{\varepsilon} J_y^{n+\frac{1}{2}}
 \end{aligned} \tag{4.19}$$

$$\begin{aligned}
 E_z^{n+1}(i, j, k + \frac{1}{2}) &= E_z^n(i, j, k + \frac{1}{2}) \\
 &+ \frac{\Delta t}{\varepsilon \Delta x} \left\{ H_y^{n+\frac{1}{2}}(i + \frac{1}{2}, j, k + \frac{1}{2}) - H_y^{n+\frac{1}{2}}(i - \frac{1}{2}, j, k + \frac{1}{2}) \right\} \\
 &- \frac{\Delta t}{\varepsilon \Delta y} \left\{ H_x^{n+\frac{1}{2}}(i, j + \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}) - H_x^{n+\frac{1}{2}}(i, j - \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}) \right\} \\
 &- \frac{\Delta t}{\varepsilon} J_z^{n+\frac{1}{2}}
 \end{aligned} \tag{4.20}$$

が得られる。上式を、給電部の電界に適用すると、励振パルスの信号がゼロになった後は、通常の FDTD の差分式が自動的に適用されることになり、アンテナの境界条件に何ら変化は無い。

したがって、図 4.5 の様なアンテナの場合、ギャップの電界の積分より給電電圧 $V(n\Delta t)$ は

$$V(n\Delta t) = -\Delta z E_z^n(i_f, j_f, k_f + \frac{1}{2}) \quad (4.21)$$

となり、電流 $I(n\Delta t)$ はアンペアの法則より、式 (4.51) より求め、入力インピーダンス Z_{dipole} は給電電圧 $V(n\Delta t)$ と $I((n + \frac{1}{2})\Delta t)$ のフーリエ変換より

$$Z_{\text{dipole}}(\omega) = \frac{\mathcal{F}[V(n\Delta t)]}{\mathcal{F}[I((n + \frac{1}{2})\Delta t)]} \quad (4.22)$$

となる。このとき、電圧と電流には $\Delta t/2$ 時間だけずれているが、フーリエ変換後の位相差は、サンプル数を N とすると π/N となるから、 N を十分にとると、時間の半ステップの差は問題にならない値となる。

4.4 遠方界

FDTD 法では有限の解析領域しか計算できないので、アンテナの放射パターンなど遠方界における電磁界特性を直接求めることはできない。しかし、FDTD シミュレーションで得られた近傍電磁界を適切な方法を用いて遠方界へ変換すれば、放射パターンなどのアンテナの諸特性を求めることが可能である。

4.4.1 等価電流・磁流法による遠方界の表現

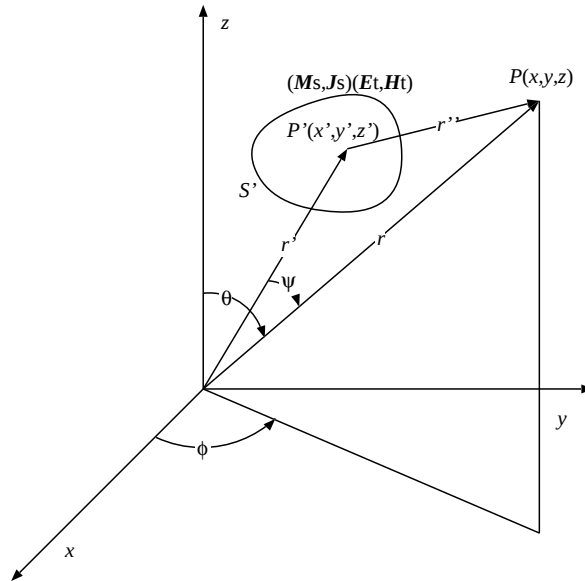


図 4.6: 遠方界を求めるための座標

まず、図 4.6 に示す表面 S' によって囲まれた波源からの放射電磁界を考える。もし、この波源により生じた表面 S' 上の電流密度 J_s 及び M_s が既知のものであれば、ベクトルポテンシャル

$$\mathbf{A} = \mu \int_{S'} \frac{\mathbf{J}_s e^{-jkr''}}{4\pi r''} dS' \quad (4.23a)$$

$$\mathbf{F} = \varepsilon \int_{S'} \frac{\mathbf{M}_s e^{-jkr''}}{4\pi r''} dS' \quad (4.23b)$$

を用いることによって、遠方の点 P における電磁界を次式によって求めることができる。

$$\mathbf{E} = -j\omega\mathbf{A} - \frac{j\omega}{k^2}\nabla(\nabla\cdot\mathbf{A}) - \frac{1}{\varepsilon}\nabla\times\mathbf{F} \quad (4.24a)$$

$$\mathbf{H} = -j\omega\mathbf{F} - \frac{j\omega}{k^2}\nabla(\nabla\cdot\mathbf{F}) + \frac{1}{\mu}\nabla\times\mathbf{A} \quad (4.24b)$$

遠方界の場合には、 $r' \ll r$ となるので、次式の近似が成り立つ。

$$r'' = \sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr'\cos\psi} \cong r - r'\cos\psi \quad (4.25)$$

従って、式 (4.23) のベクトルポテンシャルを次のように近似できる。

$$\mathbf{A} = \mu \frac{e^{-jkr}}{4\pi r} \int_{S'} \mathbf{J}_s e^{jkr'\cos\psi} dS' \quad (4.26a)$$

$$\mathbf{F} = \varepsilon \frac{e^{-jkr}}{4\pi r} \int_{S'} \mathbf{M}_s e^{jkr'\cos\psi} dS' \quad (4.26b)$$

ただし、

$$r'\cos\psi = \mathbf{r}' \cdot \hat{\mathbf{r}} = x'\sin\theta\cos\phi + y'\sin\theta\sin\phi + z'\cos\theta \quad (4.27)$$

式 (4.26) 中の積分は表面積 S' における電流・磁流密度の分布及び角度 ψ のみの関数であるので、新たに放射ベクトル $\mathbf{N}$ 、 $\mathbf{L}$ を次のように定義する。

$$\mathbf{N} = \int_{S'} \mathbf{J}_s e^{jkr'\cos\psi} dS' \quad (4.28a)$$

$$\mathbf{L} = \int_{S'} \mathbf{M}_s e^{jkr'\cos\psi} dS' \quad (4.28b)$$

この結果、ベクトルポテンシャルは次式のように簡単に表現できる。

$$\mathbf{A} = \mu \frac{e^{-jkr}}{4\pi r} \mathbf{N} \quad (4.29a)$$

$$\mathbf{F} = \varepsilon \frac{e^{-jkr}}{4\pi r} \mathbf{L} \quad (4.29b)$$

式 (4.29) を式 (4.24) に代入し、 $1/r$ よりも早く減衰する項を無視すると、遠方における電磁界を次のように求められる。

$$E_\theta = \eta H_\phi = -j \frac{e^{-jkr}}{2\lambda r} (\eta N_\theta + L_\phi) \quad (4.30a)$$

$$E_\phi = -\eta H_\theta = j \frac{e^{-jkr}}{2\lambda r} (\eta N_\phi + L_\theta) \quad (4.30b)$$

FDTD 法では、遠方界を求めるための図 4.6 の面 S' に相当する仮想面を、図 4.7 に示すように、解析領域の少し内側 (通常 3 ~ 4 セル) に定義し、このボックスの表面における電磁界成分に対応する等価電流・磁流密度を求めてから、遠方界の電磁界成分や放射強度を計算する。この場合、電流密度 $\mathbf{J}_s$ および磁流密度 $\mathbf{M}_s$ は、次のように与えられる。

$$\mathbf{J}_s = \mathbf{n} \times \mathbf{H} \quad (4.31a)$$

$$\mathbf{M}_s = -\mathbf{n} \times \mathbf{E} \quad (4.31b)$$

図 4.7 中の仮想ボックスの外側を FDTD のセルの表面と一致するように定義すれば、電界の接線成分が直ちに得られ、磁流密度 $\mathbf{M}_s$ の計算が図 4.8(a) に示すように容易になる。一方、FDTD セルにおける磁界の接線成分には磁界の成分との間に半空間ステップだけのずれがある。そのため、電流密度 $\mathbf{J}_s$ を計算するためには、

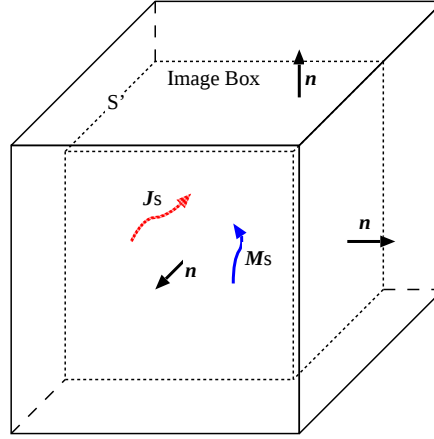


図 4.7: 遠方界を求めるための仮想ボックス

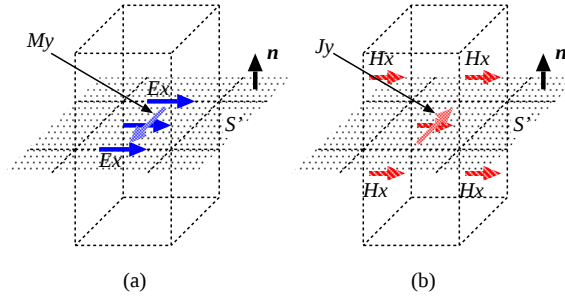


図 4.8: 等価電流・磁流と電界・磁界

図 4.8(b) に示すように、仮想ボックスの表面の内側と外側の二つのセルの磁界成分の平均値を用いて求める。すなわち、座標 $(x + 1/2, j + 1/2, k)$ の電流密度 $J_y(x + 1/2, j + 1/2, k)$ と磁流密度 $M_y(x + 1/2, j + 1/2, k)$ は、

$$J_y = \frac{1}{2} \left\{ E_x(x + \frac{1}{2}, j, k) + E_x(x + \frac{1}{2}, j + 1, k) \right\} \quad (4.32a)$$

$$M_y = -\frac{1}{4} \left\{ H_x(x, j + \frac{1}{2}, k - \frac{1}{2}) + H_x(x, j + \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}) \right. \\ \left. + H_x(x + 1, j + \frac{1}{2}, k - \frac{1}{2}) + H_x(x + 1, j + \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}) \right\} \quad (4.32b)$$

となる。他の成分も同様にして求める。

このように求めた電流密度 J_s 及び磁流密度 M_s は、通常直角座標系で次のように表現している。

$$\mathbf{J}_s = J_x \hat{x} + J_y \hat{y} + J_z \hat{z} \quad (4.33a)$$

$$\mathbf{M}_s = M_x \hat{x} + M_y \hat{y} + M_z \hat{z} \quad (4.33b)$$

これらの電流・磁流密度成分を用いて、式 (4.30) 中の放射ベクトルの各成分 N_θ 、 N_ϕ 、 L_θ 、 L_ϕ を求めると次のようになる。

$$N_\theta = \int_{S'} (J_x \cos \theta \cos \phi + J_y \cos \theta \sin \phi - J_z \sin \theta) e^{jkr' \cos \psi} dS' \quad (4.34a)$$

$$N_\phi = \int_{S'} (-J_x \sin \phi + J_y \cos \phi) e^{jkr' \cos \psi} dS' \quad (4.34b)$$

$$L_\theta = \int_{S'} (M_x \cos \theta \cos \phi + M_y \cos \theta \sin \phi - M_z \sin \theta) e^{jkr' \cos \psi} dS' \quad (4.34c)$$

$$L_\phi = \int_{S'} (-M_x \sin \phi + M_y \cos \phi) e^{jkr' \cos \psi} dS' \quad (4.34d)$$

これらの電磁界成分を用いて、遠方の点 (r, θ, ϕ) におけるポインティング・ベクトル P_r を次式により求める。

$$P_r = \frac{1}{2} \text{Re}[E_\theta H_\phi^* - E_\phi H_\theta^*] = \frac{\eta}{8\lambda^2 r^2} \left(|N_\theta + \frac{L_\phi}{\eta}|^2 + |N_\phi + \frac{L_\theta}{\eta}|^2 \right) \quad (4.35)$$

従って、 (θ, ϕ) 方向の放射強度は次のように表せる。

$$K = \frac{\eta}{8\lambda^2} \left(|N_\theta + \frac{L_\phi}{\eta}|^2 + |N_\phi + \frac{L_\theta}{\eta}|^2 \right) \quad (4.36)$$

4.4.2 利得

利得 G は

$$G(\omega, \theta, \phi) = \frac{P_r}{P_{\text{in}}/4\pi} \quad (4.37)$$

で与えられる。ただし、 P_{in} は入力電力で、給電点の電圧 $V(t)$ と電流 $I(t)$ のフーリエ変換 $V(\omega)$ と $I(\omega)$ より

$$P_{\text{in}} = \frac{1}{2} \text{Re}[V(\omega)I^*(\omega)] \quad (4.38)$$

で与えられる。導体損失や誘電体損失を考慮した場合、利得 G は実効利得となる。

また動作利得 G_{act} は、不整合損失を M とすると、

$$G_{\text{act}} = \frac{G}{M} \quad (4.39)$$

となる。ただし、

$$M = \frac{1}{1 - |\Gamma|^2} \quad (4.40)$$

である。

4.5 電流分布の計算

線状導体の電流の計算方法について示す。図 4.9 に計算モデルを示す。座標 (i_c, j_c, k_c) の z 軸の辺に太さが

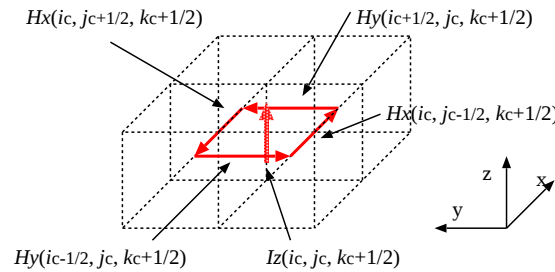


図 4.9: 線状導体の電流の計算

無限小の線状導体があると仮定する。そこを流れる電流は、アンペアの法則により、周囲の磁界の積分より求めることができる。座標 $(i_c, j_c, k_c + 1/2)$ の z 軸に沿う電流 $I_z(i_c, j_c, k_c + 1/2)$ は

$$\begin{aligned} I_z^{n+\frac{1}{2}}(i_c, j_c, k_c + \frac{1}{2}) &= \left\{ H_x^{n+\frac{1}{2}}(i_c, j_c - \frac{1}{2}, k_c + \frac{1}{2}) - H_x^{n+\frac{1}{2}}(i_c, j_c + \frac{1}{2}, k_c + \frac{1}{2}) \right\} \Delta x \\ &+ \left\{ H_y^{n+\frac{1}{2}}(i_c, j_c + \frac{1}{2}, k_c + \frac{1}{2}) - H_y^{n+\frac{1}{2}}(i_c, j_c - \frac{1}{2}, k_c + \frac{1}{2}) \right\} \Delta y \end{aligned} \quad (4.41)$$

となる。

次に、面状導体表面を流れる電流の計算方法について示す。導体表面を流れる電流分布は、FDTD 法では直接求めることができない。そのため、導体表面の境界条件

$$\mathbf{n} \times \mathbf{H} = \mathbf{J} \quad (4.42)$$

より求める。

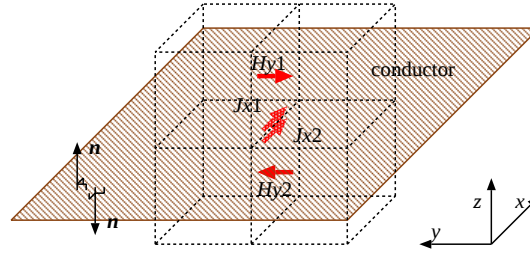


図 4.10: 導体表面の電流の計算

図 4.10 に示すような場合、導体の上面の磁界 H_{y1} より電流 J_{x1} を求め、導体の下面の磁界 H_{y2} より電流 J_{x2} を求める。導体の厚さを 0 とすれば、導体表面電流 J_x は、

$$J_x = J_{x1} + J_{x2} = -H_{y1} + H_{y2} \quad (4.43)$$

となる。

図 4.10 に示すように、導体表面の電流と磁界には空間離散間隔の半分の距離があるため、式 (4.43) には誤差が含まれるが、通常 FDTD 法では、空間離散間隔を波長に比べ十分小さい値を選ぶため、この誤差は無視できる。

4.6 集中定数素子

回路素子の大きさ (量) は FDTD 法によって簡単にモデル化できるので、電磁界との結合は回路の入出力端子だけを考慮して解析することができる。ここでは、素子の物理的な寸法は波長より十分小さいとし、その大きさは、1 セル内に入る大きさとする。

素子が挿入されている座標を $(i_L, j_L, k_L + \frac{1}{2})$ とし、 z 軸に平行であるとする。素子に流れる導電電流を J_L とすると、強制電流源を含むマックスウェル式 (1.7) より、

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon} \nabla \times \mathbf{H} - \frac{1}{\varepsilon} \mathbf{J}_L \quad (4.44)$$

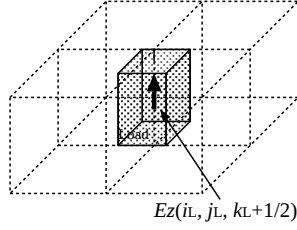


図 4.11: FDTD セル内の集中定数素子

となるから、電界の z 軸成分の E_z は、素子に流れる電流 I_L を用いて定式化すると、

$$\begin{aligned}
 E_z^{n+1}(i_L, j_L, k_L + \frac{1}{2}) &= E_z^n(i_L, j_L, k_L + \frac{1}{2}) \\
 &+ \frac{\Delta t}{\varepsilon \Delta x} \left\{ H_y^{n+\frac{1}{2}}(i_L + \frac{1}{2}, j_L, k_L + \frac{1}{2}) - H_y^{n+\frac{1}{2}}(i_L - \frac{1}{2}, j_L, k_L + \frac{1}{2}) \right\} \\
 &- \frac{\Delta t}{\varepsilon \Delta y} \left\{ H_x^{n+\frac{1}{2}}(i_L, j_L + \frac{1}{2}, k_L + \frac{1}{2}) - H_x^{n+\frac{1}{2}}(i_L, j_L - \frac{1}{2}, k_L + \frac{1}{2}) \right\} \\
 &- \frac{\Delta t}{\varepsilon} \frac{1}{\Delta x \Delta y} I_L^{n+\frac{1}{2}}(i_L, j_L, k_L + \frac{1}{2})
 \end{aligned} \tag{4.45}$$

で表される。ただし、素子に流れる電流 I_L は、

$$\mathbf{J}_L = \frac{1}{\Delta x \Delta y} I_L \hat{z} \tag{4.46}$$

で、 z 軸方向を電流の正の方向とする。この電流は素子端の電圧の関数、すなわち電界の関数となり、素子の種類によって異なる。

電流 I_L の時間項は $n + \frac{1}{2}$ となり、磁界の時間項と同じで、電界とは半時間ステップの差がある。そのため、時間 $n + \frac{1}{2}$ の電界を時間 $t = n\Delta t$ と $t = (n+1)\Delta t$ の内挿

$$E_z^{n+\frac{1}{2}}(i_L, j_L, k_L + \frac{1}{2}) = \frac{E_z^{n+1}(i_L, j_L, k_L + \frac{1}{2}) + E_z^n(i_L, j_L, k_L + \frac{1}{2})}{2} \tag{4.47}$$

で表す。時間ステップ Δt を解析周波数の周期 T に比べて十分小さく選ぶので、半時間ステップの差は無視できる。

しかし一般には、素子の大きさは波長に比べて無視できない場合がある。実際の素子の大きさが5セル相当の場合には、図 4.12 に示すように、素子の特性を1セルの電界に与え、その他を無限に細い導線として与えることで、全体をモデル化する。

4.6.1 抵抗

素子の両端の電圧を V_L とすると、 $V_L = E_z \Delta z$ であるから素子に流れる電流は

$$I_L = \frac{V_L}{R} = \frac{E_z \Delta z}{R} \tag{4.48}$$

で与えられる。電流は電界と半時間ステップずれているので、FDTD シミュレーションでは上式は、

$$I_L^{n+\frac{1}{2}} = \frac{E_z^{n+1} + E_z^n}{2} \frac{\Delta z}{R} \tag{4.49}$$

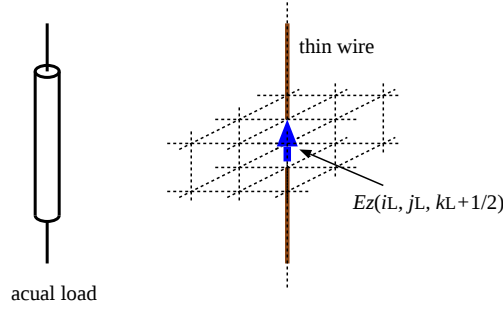


図 4.12: FDTD セル内の実際の集中定数素子

となり、式 (4.45) に代入すると、

$$\begin{aligned}
 E_z^{n+1}(i_L, j_L, k_L + \frac{1}{2}) &= \frac{\Theta_{R2}}{\Theta_{R1}} E_z^n(i_L, j_L, k_L + \frac{1}{2}) \\
 &+ \frac{1}{\Theta_{R1}} \frac{\Delta t}{\varepsilon \Delta x} \left\{ H_y^{n+\frac{1}{2}}(i_L + \frac{1}{2}, j_L, k_L + \frac{1}{2}) - H_y^{n+\frac{1}{2}}(i_L - \frac{1}{2}, j_L, k_L + \frac{1}{2}) \right\} \\
 &- \frac{1}{\Theta_{R1}} \frac{\Delta t}{\varepsilon \Delta y} \left\{ H_x^{n+\frac{1}{2}}(i_L, j_L + \frac{1}{2}, k_L + \frac{1}{2}) - H_x^{n+\frac{1}{2}}(i_L, j_L - \frac{1}{2}, k_L + \frac{1}{2}) \right\} \\
 &\Theta_{R1} = 1 + \frac{\Delta t \Delta z}{2R\varepsilon \Delta x \Delta y}, \quad \Theta_{R2} = 1 - \frac{\Delta t \Delta z}{2R\varepsilon \Delta x \Delta y}
 \end{aligned} \tag{4.50}$$

となる。また、素子に流れる全電流は、その周りの磁界を用いてアンペアの法則より、

$$\begin{aligned}
 I \left((n + \frac{1}{2}) \Delta t \right) &= \left\{ H_x^{n+\frac{1}{2}}(i_L, j_L - \frac{1}{2}, k_L + \frac{1}{2}) - H_x^{n+\frac{1}{2}}(i_L, j_L + \frac{1}{2}, k_L + \frac{1}{2}) \right\} \Delta x \\
 &+ \left\{ H_y^{n+\frac{1}{2}}(i_L, j_L + \frac{1}{2}, k_L + \frac{1}{2}) - H_y^{n+\frac{1}{2}}(i_L, j_L - \frac{1}{2}, k_L + \frac{1}{2}) \right\} \Delta y
 \end{aligned} \tag{4.51}$$

となる。

ただし、 R が非常に小さい値のとき

$$\begin{aligned}
 \Theta_{R1} &= 1 + \frac{\Delta t \Delta z}{2R\varepsilon \Delta x \Delta y} \approx 1 \\
 \Theta_{R2} &= 1 - \frac{\Delta t \Delta z}{2R\varepsilon \Delta x \Delta y} \approx -1
 \end{aligned} \tag{4.52}$$

となり、 $E_z^0 = 0$ で無い限り解の収束が保証されない。そのため、式 (4.49) を

$$I_L^{n+\frac{1}{2}} = E_z^{n+1} \frac{\Delta z}{R} \tag{4.53}$$

とおき替えても、計算精度の低下は少ない。式 (4.50) は

$$\begin{aligned}
 E_z^{n+1}(i_L, j_L, k_L + \frac{1}{2}) &= \frac{1}{\Theta_{R1}} E_z^n(i_L, j_L, k_L + \frac{1}{2}) \\
 &+ \frac{1}{\Theta_{R1}} \frac{\Delta t}{\varepsilon \Delta x} \left\{ H_y^{n+\frac{1}{2}}(i_L + \frac{1}{2}, j_L, k_L + \frac{1}{2}) - H_y^{n+\frac{1}{2}}(i_L - \frac{1}{2}, j_L, k_L + \frac{1}{2}) \right\} \\
 &- \frac{1}{\Theta_{R1}} \frac{\Delta t}{\varepsilon \Delta y} \left\{ H_x^{n+\frac{1}{2}}(i_L, j_L + \frac{1}{2}, k_L + \frac{1}{2}) - H_x^{n+\frac{1}{2}}(i_L, j_L - \frac{1}{2}, k_L + \frac{1}{2}) \right\} \\
 &\Theta_{R1} = 1 + \frac{\Delta t \Delta z}{R\varepsilon \Delta x \Delta y}
 \end{aligned} \tag{4.54}$$

となる。

4.6.2 コンデンサ

容量 C のコンデンサに流れる電流 I_L と電圧 V_L との間には

$$I_L = C \frac{dV_L}{dt} \quad (4.55)$$

の関係があるから、

$$I_L^{n+\frac{1}{2}} = C \frac{\Delta z}{\Delta t} (E_z^{n+1} - E_z^n) \quad (4.56)$$

となり、これを式 (4.45) に代入すると、

$$\begin{aligned} E_z^{n+1}(i_L, j_L, k_L + \frac{1}{2}) &= E_z^n(i_L, j_L, k_L + \frac{1}{2}) \\ &+ \frac{1}{\Theta_C} \frac{\Delta t}{\varepsilon \Delta x} \left\{ H_y^{n+\frac{1}{2}}(i_L + \frac{1}{2}, j_L, k_L + \frac{1}{2}) - H_y^{n+\frac{1}{2}}(i_L - \frac{1}{2}, j_L, k_L + \frac{1}{2}) \right\} \\ &- \frac{1}{\Theta_C} \frac{\Delta t}{\varepsilon \Delta y} \left\{ H_x^{n+\frac{1}{2}}(i_L, j_L + \frac{1}{2}, k_L + \frac{1}{2}) - H_x^{n+\frac{1}{2}}(i_L, j_L - \frac{1}{2}, k_L + \frac{1}{2}) \right\} \\ \Theta_C &= 1 + \frac{C \Delta z}{\varepsilon \Delta x \Delta y} \end{aligned} \quad (4.57)$$

となる。

4.6.3 コイル

自己インダクタンス L に流れる電流 I_L と電圧 V_L との間には

$$I_L = \frac{1}{L} \int_0^t V_L(\tau) d\tau \quad (4.58)$$

の関係があるから、

$$I_L^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{L} \int_0^{(n+\frac{1}{2})\Delta t} V_L(\tau) d\tau = -\frac{\Delta z}{L} \int_0^{(n+\frac{1}{2})\Delta t} E_z(\tau) d\tau \quad (4.59)$$

となり、上式の積分を

$$\int_0^{(n+\frac{1}{2})\Delta t} E_z(\tau) d\tau = \Delta t \sum_{m=1}^n E_z^m \quad (4.60)$$

とし、これを式 (4.45) に代入すると、

$$\begin{aligned} E_z^{n+1}(i_L, j_L, k_L + \frac{1}{2}) &= E_z^n(i_L, j_L, k_L + \frac{1}{2}) \\ &+ \frac{\Delta t}{\varepsilon \Delta x} \left\{ H_y^{n+\frac{1}{2}}(i_L + \frac{1}{2}, j_L, k_L + \frac{1}{2}) - H_y^{n+\frac{1}{2}}(i_L - \frac{1}{2}, j_L, k_L + \frac{1}{2}) \right\} \\ &- \frac{\Delta t}{\varepsilon \Delta y} \left\{ H_x^{n+\frac{1}{2}}(i_L, j_L + \frac{1}{2}, k_L + \frac{1}{2}) - H_x^{n+\frac{1}{2}}(i_L, j_L - \frac{1}{2}, k_L + \frac{1}{2}) \right\} \\ &- \frac{\Delta z \Delta t}{\varepsilon L \Delta x \Delta y} \Delta t \sum_{m=1}^n E_z^m(i_L, j_L, k_L + \frac{1}{2}) \end{aligned} \quad (4.61)$$

を得る。

4.6.4 ダイオード

ダイオードの V - I 特性は

$$I_L = I_0 \left\{ \exp \left(\frac{qV_L}{kT} \right) - 1 \right\} \quad (4.62)$$

で表される。ただし、 q は電子の電荷量、 k はボルツマン定数、 T は絶対温度であり、 I_0 は逆方向飽和電流密度である。式 (4.62) において電圧 V_L の時間項を $t = (n + 1/2)\Delta t$ とし、

$$V_L^{n+1/2} = \frac{E_z^{n+1} + E_z^n}{2} \Delta z \quad (4.63)$$

を用い、式 (4.62) を式 (4.45) に代入すると、

$$\begin{aligned} E_z^{n+1}(i_L, j_L, k_L + \frac{1}{2}) &= E_z^n(i_L, j_L, k_L + \frac{1}{2}) \\ &+ \frac{\Delta t}{\varepsilon \Delta x} \left\{ H_y^{n+1/2}(i_L + \frac{1}{2}, j_L, k_L + \frac{1}{2}) - H_y^{n+1/2}(i_L - \frac{1}{2}, j_L, k_L + \frac{1}{2}) \right\} \\ &- \frac{\Delta t}{\varepsilon \Delta y} \left\{ H_x^{n+1/2}(i_L, j_L + \frac{1}{2}, k_L + \frac{1}{2}) - H_x^{n+1/2}(i_L, j_L - \frac{1}{2}, k_L + \frac{1}{2}) \right\} \\ &- \frac{\Delta t}{\varepsilon \Delta x \Delta y} I_0 \left[\exp \left\{ \frac{q \Delta z}{2kT} \left(E_z^{n+1}(i_L, j_L, k_L + \frac{1}{2}) + E_z^n(i_L, j_L, k_L + \frac{1}{2}) \right) \right\} - 1 \right] \end{aligned} \quad (4.64)$$

となる。これは、非線形方程式であるから、直接 E_z^{n+1} を求める事はできない。そこで、Newton 法による近似で解を求める。

まず、上式を

$$\begin{aligned} E_z^n(i_L, j_L, k_L + \frac{1}{2}) &+ \frac{\Delta t}{\varepsilon \Delta x} \left\{ H_y^{n+1/2}(i_L + \frac{1}{2}, j_L, k_L + \frac{1}{2}) - H_y^{n+1/2}(i_L - \frac{1}{2}, j_L, k_L + \frac{1}{2}) \right\} \\ &- \frac{\Delta t}{\varepsilon \Delta y} \left\{ H_x^{n+1/2}(i_L, j_L + \frac{1}{2}, k_L + \frac{1}{2}) - H_x^{n+1/2}(i_L, j_L - \frac{1}{2}, k_L + \frac{1}{2}) \right\} \\ &- \frac{\Delta t}{\varepsilon \Delta x \Delta y} I_0 \left[\exp \left\{ \frac{q \Delta z}{2kT} \left(E_z^{n+1}(i_L, j_L, k_L + \frac{1}{2}) + E_z^n(i_L, j_L, k_L + \frac{1}{2}) \right) \right\} - 1 \right] \\ &- E_z^{n+1}(i_L, j_L, k_L + \frac{1}{2}) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (4.65)$$

と変形し、上式を変数 E_z^{n+1} の関数 $f(E_z^{n+1})$ とする (式が複雑になるので座標を省く) と、

$$\begin{aligned} f(E_z^{n+1}) &= E_z^n + \frac{\Delta t}{\varepsilon} \nabla \times \mathbf{H}^{n+1/2}|_z \\ &- \frac{\Delta t}{\varepsilon \Delta x \Delta y} I_0 \left[\exp \left\{ \frac{q \Delta z}{2kT} (E_z^{n+1} + E_z^n) \right\} - 1 \right] - E_z^{n+1} \end{aligned} \quad (4.66a)$$

$$\nabla \times \mathbf{H}^{n+1/2}|_z = \frac{1}{\Delta x} \left\{ H_y^{n+1/2} - H_y^{n+1/2} \right\} - \frac{1}{\Delta y} \left\{ H_x^{n+1/2} - H_x^{n+1/2} \right\} \quad (4.66b)$$

となる。この式を E_z^{n+1} について微分すると、

$$\frac{d}{dE_z^{n+1}} f(E_z^{n+1}) = -\frac{q \Delta z}{2kT} \frac{\Delta t}{\varepsilon \Delta x \Delta y} I_0 \exp \left\{ \frac{q \Delta z}{2kT} (E_z^{n+1} + E_z^n) \right\} - 1 \quad (4.67)$$

が得られる。Newton 法によれば、 $f(E_z^{n+1}) = 0$ の第 i 次近似解を $E_z^{n+1}|_i$ と表現すると、

$$E_z^{n+1}|_{i+1} = E_z^{n+1}|_i - \frac{f(E_z^{n+1}|_i)}{\frac{d}{dE_z^{n+1}} f(E_z^{n+1}|_i)} \quad (4.68)$$

第 $(i+1)$ 次近似解は上式より求め、この近似を繰り返し m 回行い、第 $(i+1)$ 次近似と第 i 次近似との差がその値に比べ無視できる場合、 $E_z^{n+1}|_m$ を $f(E_z^{n+1}) = 0$ の解とみなす事ができる。

式 (4.66a)、(4.67) を式 (4.68) に代入すると

$$E_z^{n+1}|_{i+1} = E_z^{n+1}|_i - \frac{E_z^n + \frac{\Delta t}{\varepsilon} \nabla \times \mathbf{H}^{n+\frac{1}{2}}|_z - \frac{\Delta t}{\varepsilon \Delta x \Delta y} I_0 \left[\exp \left\{ \frac{q \Delta z}{2kT} (E_z^{n+1}|_i + E_z^n) \right\} - 1 \right] - E_z^{n+1}|_i}{-\frac{q \Delta z}{2kT} \frac{\Delta t}{\varepsilon \Delta x \Delta y} I_0 \exp \left\{ \frac{q \Delta z}{2kT} (E_z^{n+1}|_i + E_z^n) \right\} - 1} \quad (4.69)$$

となる。プログラム中では、上式において、初期値 $E_z^{n+1}|_0$ を時間ステップ n における E_z の値 E_z^n とし近似を繰り返し、 $E_z^{n+1}|_i$ と $E_z^{n+1}|_{i+1}$ との差をある閾値と比較し、 $E_z^{n+1}|_m$ を求める。

実際にダイオードを回路に使う場合直流バイアスを掛ける場合が多い。この場合、式 (4.62) にバイアス電圧 V_B を考慮すると

$$I_L = I_0 \left\{ \exp \left(\frac{q(V_L + V_B)}{kT} \right) - 1 \right\} \quad (4.70)$$

となり、式 (4.66a) は、

$$f(E_z^{n+1}) = E_z^n + \frac{\Delta t}{\varepsilon} \nabla \times \mathbf{H}^{n+\frac{1}{2}}|_z - \frac{\Delta t}{\varepsilon \Delta x \Delta y} I_0 \left[\exp \left\{ \frac{q}{kT} \left(\frac{E_z^{n+1} + E_z^n}{2} \Delta z + V_B \right) \right\} - 1 \right] - E_z^{n+1} \quad (4.71)$$

式 (4.67) は、

$$\frac{d}{dE_z^{n+1}} f(E_z^{n+1}) = -\frac{q \Delta z}{2kT} \frac{\Delta t}{\varepsilon \Delta x \Delta y} I_0 \exp \left\{ \frac{q}{kT} \left(\frac{E_z^{n+1} + E_z^n}{2} \Delta z + V_B \right) \right\} - 1 \quad (4.72)$$

となる。上式よりバイアス電圧を考慮した式は、

$$E_z^{n+1}|_{i+1} = E_z^{n+1}|_i - \frac{E_z^n + \frac{\Delta t}{\varepsilon} \nabla \times \mathbf{H}^{n+\frac{1}{2}}|_z - \frac{\Delta t}{\varepsilon \Delta x \Delta y} I_0 \left[\exp \left\{ \frac{q}{kT} \left(\frac{E_z^{n+1}|_i + E_z^n}{2} \Delta z + V_B \right) \right\} - 1 \right] - E_z^{n+1}|_i}{-\frac{q \Delta z}{2kT} \frac{\Delta t}{\varepsilon \Delta x \Delta y} I_0 \exp \left\{ \frac{q}{kT} \left(\frac{E_z^{n+1}|_i + E_z^n}{2} \Delta z + V_B \right) \right\} - 1} \quad (4.73)$$

となる。

さらに、逆バイアスのときの寄生容量を C_p とすると、式 (4.73) はそれぞれ

$$E_z^{n+1}|_{i+1} = E_z^{n+1}|_i - \frac{\Theta_{C_p} E_z^n + \frac{\Delta t}{\varepsilon} \nabla \times \mathbf{H}^{n+\frac{1}{2}}|_z - \frac{\Delta t}{\varepsilon \Delta x \Delta y} I_0 \left[\exp \left\{ \frac{q}{kT} \left(\frac{E_z^{n+1}|_i + E_z^n}{2} \Delta z + V_B \right) \right\} - 1 \right] - \Theta_{C_p} E_z^{n+1}|_i}{-\frac{q \Delta z}{2kT} \frac{\Delta t}{\varepsilon \Delta x \Delta y} I_0 \exp \left\{ \frac{q}{kT} \left(\frac{E_z^{n+1}|_i + E_z^n}{2} \Delta z + V_B \right) \right\} - \Theta_{C_p}} \quad (4.74a)$$

$$\Theta_{C_p} = 1 + \frac{C_p \Delta z}{\varepsilon \Delta x \Delta y}$$

となる。

4.7 マイクロストリップアンテナへの適用

本節では、FDTD 法のマイクロストリップアンテナへの適用について次のような項目について検討している。

- アンテナ構造のモデリング
- 集中定数素子のモデリング
- 励振方法
- 入力インピーダンスの計算
- 遠方界の計算
- 電流分布の計算
- 無限接地板のアンテナの計算
- 対称構造のアンテナの計算

4.7.1 マイクロストリップアンテナの FDTD モデル化

図 4.13 にマイクロストリップアンテナと FDTD の計算領域を示す。解析領域を $i_{\max} \times j_{\max} \times k_{\max}$ セルとし、マイクロストリップアンテナは正方形の給電素子 (大きさ: $l_f \times l_f$)、接地板 (大きさ: $l_g \times l_g$) と誘電体基板 (大きさ: $l_g \times l_g$ 、厚さ: t_f 、比誘電率: ϵ_r) で構成されているとする。ただし、給電素子と接地板の厚さは 0 と仮定する。アンテナを解析領域のほぼ中央に、給電素子や接地板が x - y 面に並行になるように置く。このときアンテナの主ビーム方向は z 軸と同じになる。

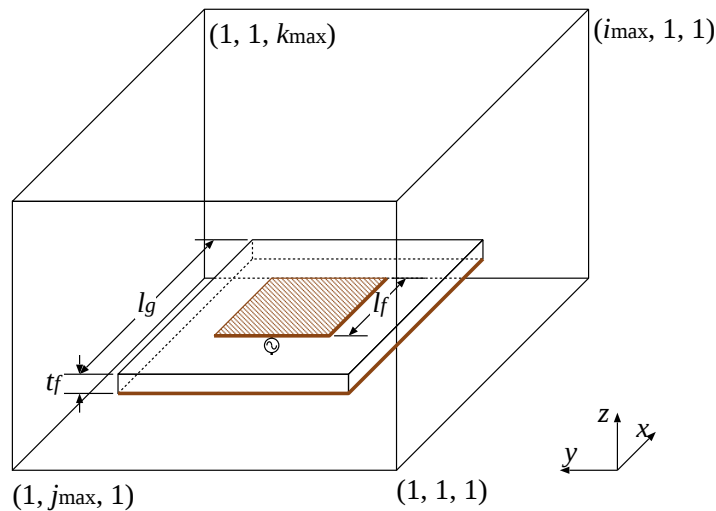


図 4.13: マイクロストリップアンテナの FDTD モデル化

給電素子、接地板のモデル化

完全導体表面では、次式が成立し、電界の接線成分と磁界の法線成分は共に0である。

$$\begin{aligned} \mathbf{n} \times \mathbf{E} &= 0 \\ \mathbf{n} \cdot \mathbf{H} &= 0 \end{aligned} \quad (4.75)$$

すなわち、Yeeセルのある1つの面内の4つの電界成分の全てが0の場合、その面は厚さが0の完全導体となる。また、Yeeセルの1つの辺の電界成分が0の場合、その辺は太さが0の完全導体線となる。

図4.14に示すように、給電素子や接地板とYeeセルを配置し、給電素子や接地板に接するセルの面の電界を0にすることで、給電素子、接地板あるいは無給電素子をモデル化できる。電界の計算ステップにおいては、通常電界のアルゴリズムによる計算後に強制的に導体に接する電界成分(E_x 、 E_y)に0を代入する。磁界の法線成分(H_z)は、磁界計算ステップにおいて式(1.60)で求められるが、 E_x 、 E_y が電界計算ステップにおいて全て0になるので、強制的に0を代入する必要はなく、通常アルゴリズムによる計算で導体の境界条件が満たされる。

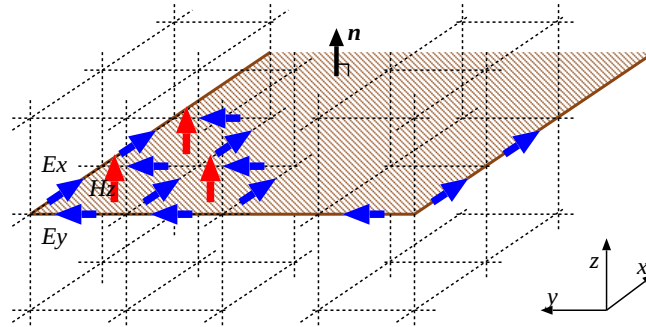


図 4.14: 給電素子、接地板のモデル化

誘電体基板のモデル化

誘電体や磁性体はその媒質の誘電率、透磁率をその座標に対応する電磁界の各成分の式に代入することで、誘電体や磁性体を含む電磁界をFDTD法により求めることができる。図4.15に示すように、誘電体の面と辺が、Yeeセルに沿うようにYeeセルと誘電体基板を配置する。このとき、次の3つの場合に分けることができる。(I):求める電界が誘電体基板の辺に位置する場合、(II):求める電界が誘電体基板の面に位置する場合、(III):求める電界が誘電体内部に位置する場合である。それぞれの場合において、式(1.58)-(1.60)の誘電率の値を適切に選ぶことで誘電体基板をモデル化できる。図中の電界 E_z の時間差分は、周辺の磁界 H_x 、 H_y の回転から求められるため、求める電界に接する4つのセルの誘電率の平均値を式(1.60)の誘電率の値に選ぶ。

$$(I) \quad \varepsilon = \varepsilon_0 \frac{3\varepsilon_{r1} + \varepsilon_{r2}}{4} \quad (4.76a)$$

$$(II) \quad \varepsilon = \varepsilon_0 \frac{\varepsilon_{r1} + \varepsilon_{r2}}{2} \quad (4.76b)$$

$$(III) \quad \varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_{r2} \quad (4.76c)$$

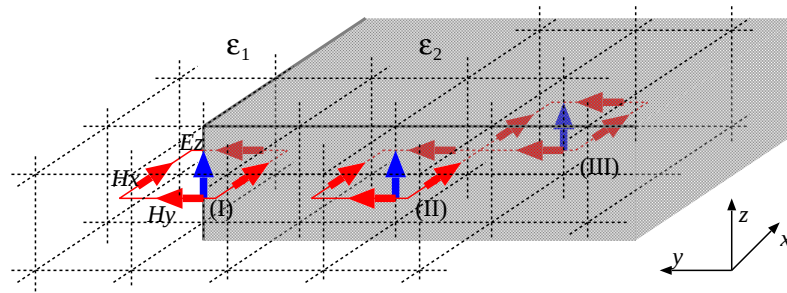
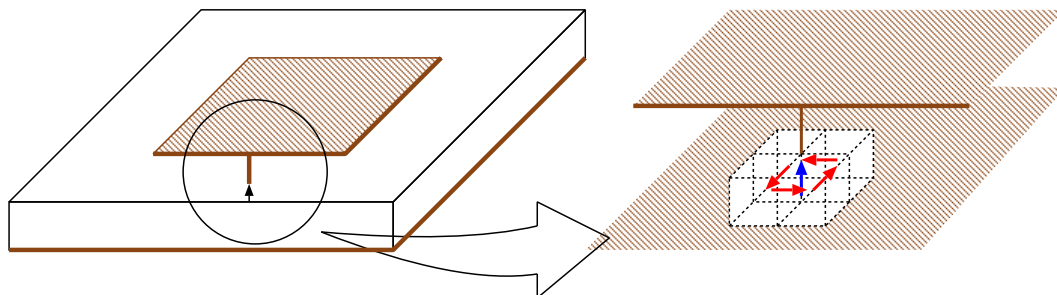


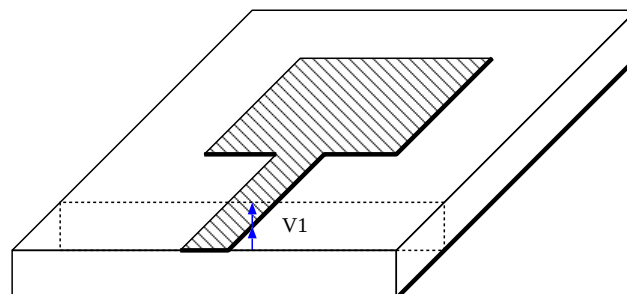
図 4.15: 誘電体基板のモデル化

4.7.2 マイクロストリップアンテナの励振方法

FDTD 法を用いて各種の解析を行う場合、励振源およびその励振方法は極めて重要となる。ここではまず FDTD 法に用いられる各種の励振源とその励振法について具体的に説明する。マイクロストリップアンテナの給電には 2 つの方法があり、アンテナ給電素子と給電線路を直接接続する方法と、電磁結合で励振する方法である。さらにアンテナ給電素子と給電線路を直接接続する方法には、図 4.16 に示すように、主に背面よりプローブで給電する方法とマイクロストリップ線路で給電する方法がある。この 2 つの給電方法は、FDTD 法において全く異なるアンテナとして扱い、励振方法の違いによって入力インピーダンスの計算方法も異なる。プローブによる背面からの給電方法 (図 4.16(a)) では、パッチと接地板にギャップを設け、そのギャップを電圧励振または電流励振する。一方、マイクロストリップ線路による給電 (図 4.16(b)) では、マイクロストリップ線路の適切な位置に励振面を設定し、ストリップ線導体と接地板の間の空間を一様励振する。



(a) Probe fed MSA



(b) Line fed MSA

図 4.16: マイクロストリップアンテナの給電方法

アンテナの励振には、ガウシアンパルスを選び、更に直流成分の影響を除くために、そのパルス波に正弦波を乗算した波を用いる。しかし、取扱いには、以下の注意が必要である。励振面において、式 (1.77) の励振信号を

$$E_z^n(i, j, k) = A e^{-\{(n\Delta t - T)/0.29T\}^2} \quad (4.77)$$

とすると、ある一定時間経つと $E_z = 0$ になる。これは、励振部分を局所的に電気壁にすることになる (ハードソース)[7]。そこで、

$$E_z^n(i, j, k) = E_z^{n-1} + \frac{\Delta t}{\varepsilon \Delta x \Delta y} \nabla \times \mathbf{H}^{n+\frac{1}{2}}(i, j, k) + A e^{-\{(n\Delta t - T)/0.29T\}^2} \quad (4.78)$$

のように選ぶことによって、励振信号がゼロになった後は通常の FDTD の差分式を適用することになる (ソフトソース)[7]。

4.7.3 アンテナの入力インピーダンス

プローブ給電型マイクロストリップアンテナ

プローブで給電されるマイクロストリップアンテナの入力インピーダンスは、図 4.17 に示すように、給電素子と接地板とのギャップの垂直電界 E_z に強制電流源 J を加えて入力インピーダンスを求める。ただし、給電素子と接地板の間が2セル以上ある場合は、給電素子から接地板へ太さの無い導線を伸ばし、接地板とに1セルのギャップを設けるようにする。そのギャップに強制電流源を加えた差分式 (4.79) を適用して、アンテナを励振する。

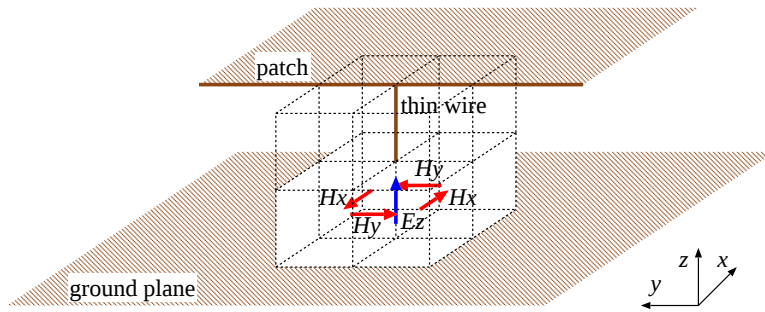


図 4.17: プローブ給電型マイクロストリップアンテナの給電部

給電点の電界の z 成分の座標を $(i_f, j_f, k_f + \frac{1}{2})$ とすると、図 4.17 に示す給電ギャップの電界 $E_z(i_f, j_f, k_f + \frac{1}{2})$ は、強制電流源 J を含むマクスウェル式 (1.7) の差分化し定式化すると、式 (1.60) より

$$\begin{aligned} E_z^{n+1}(i_f, j_f, k_f + \frac{1}{2}) &= E_z^n(i_f, j_f, k_f + \frac{1}{2}) \\ &+ \frac{\Delta t}{\varepsilon \Delta x} \left\{ H_y^{n+\frac{1}{2}}(i_f + \frac{1}{2}, j_f, k_f + \frac{1}{2}) - H_y^{n+\frac{1}{2}}(i_f - \frac{1}{2}, j_f, k_f + \frac{1}{2}) \right\} \\ &- \frac{\Delta t}{\varepsilon \Delta y} \left\{ H_x^{n+\frac{1}{2}}(i_f, j_f + \frac{1}{2}, k_f + \frac{1}{2}) - H_x^{n+\frac{1}{2}}(i_f, j_f - \frac{1}{2}, k_f + \frac{1}{2}) \right\} \\ &- \frac{\Delta t}{\varepsilon} J_z^{n+\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (4.79)$$

で表される。上式の強制電流源 J_z にガウシアンパルスの式 (1.79) を与え、アンテナを励振する。式 (4.79) では、励振パルスの信号がゼロになった後は、通常の FDTD の差分式が自動的に適用されることになり、アンテナの境界条件に何ら変化は無い。

従って、ギャップの電界の積分より給電電圧 $V(n\Delta t)$ は

$$V(n\Delta t) = -\Delta z E_z^n(i_f, j_f, k_f + \frac{1}{2}) \quad (4.80)$$

となる。また、電流 I はアンペアの法則より、

$$\begin{aligned} I\left((n + \frac{1}{2})\Delta t\right) = & \left\{ H_x^{n+\frac{1}{2}}(i_f, j_f - \frac{1}{2}, k_f + \frac{1}{2}) - H_x^{n+\frac{1}{2}}(i_f, j_f + \frac{1}{2}, k_f + \frac{1}{2}) \right\} \Delta x \\ & + \left\{ H_y^{n+\frac{1}{2}}(i_f + \frac{1}{2}, j_f, k_f + \frac{1}{2}) - H_y^{n+\frac{1}{2}}(i_f - \frac{1}{2}, j_f, k_f + \frac{1}{2}) \right\} \Delta y \end{aligned} \quad (4.81)$$

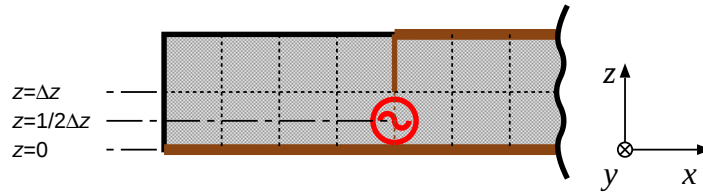
となる。入力インピーダンス $Z_{\text{pf-msa}}$ は給電電圧 $V(n\Delta t)$ と電流 $I((n + \frac{1}{2})\Delta t)$ のフーリエ変換より

$$Z_{\text{pf-msa}}(\omega) = \frac{\mathcal{F}[V(n\Delta t)]}{\mathcal{F}[I((n + \frac{1}{2})\Delta t)]} \quad (4.82)$$

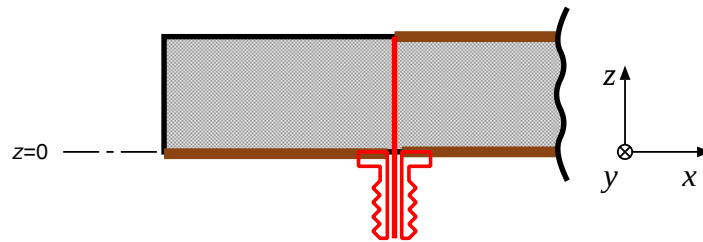
となる。ただし、 $\mathcal{F}$ はフーリエ変換演算を表している。このとき、電圧と電流には $\Delta t/2$ 時間だけずれているが、この時間差に対応するフーリエ変換後の位相差は、サンプル数を N とすると π/N となるから、 N を十分に大きくすることにより無視できる。

プローブ給電型マイクロストリップアンテナの入力インピーダンスの校正

アンテナの入力インピーダンスの FDTD 法による計算値と実験値には、その計算モデルと実験モデルには図 4.18 に示すように給電部の構造に相違がある。これによって、入力インピーダンスの位相に主に差が生じる。そこで本論文では、入力インピーダンスの実験値の位相の校正を行っている。



(a) FDTD 法における給電部の構造



(a) 実験モデルの給電部の構造

図 4.18: 給電部の構造の相違

本論文では、FDTD 法の計算において、図 4.18(a) に示すように、ひとつのセルにギャップを設けて、そこを励振源としている。そのセル内の電磁界は FDTD 法では一様と仮定しているので、接地板の位置を $z=0$ とすると、求めたアンテナの入力インピーダンスは $z = 1/2\Delta z$ の点の値となる。

一方、実験モデル (図 4.18(b)) の測定では、インピーダンス校正ポートをコネクタのフランジ面すなわち接地板の位置 ($z=0$) にしているため、入力インピーダンスの測定値は、 $z=0$ の点の値となる。

そこで、測定値の位置を計算値と一致させるために、行路長 $1/2\Delta z$ の補正を次式を用いて行い、測定値の位相を再校正している。

$$\begin{aligned}\Gamma_c &= \Gamma_m \exp^{j(\beta_g \Delta z)} \\ \Gamma_m &= \frac{Z_m - Z_0}{Z_m + Z_0} \\ \Gamma_c &= \frac{Z_c - Z_0}{Z_c + Z_0}\end{aligned}\tag{4.83}$$

ここで、 Z_m は入力インピーダンスの測定値、 Z_c は校正後の入力インピーダンス、 β_g は誘電体基板内の位相定数を表し、給電線の特性インピーダンス Z_0 を 50Ω としている。

マイクロストリップ線路給電型マイクロストリップアンテナの入力インピーダンス

マイクロストリップ線路給電型マイクロストリップアンテナの入力インピーダンスは、線路上の適切な位置に観測面を設定し、その面において波の進行波成と反射波の比によって求める。即ち、マイクロ波回路の S パラメータを求める方法と同じであり、 S_{11} が入力インピーダンスに対応する。しかし、FDTD 法においてマイクロストリップ線路を伝搬する波を進行波と反射波とに分離することができないため、1回の計算でアンテナの入力インピーダンスを求めることができない。そのため、ストリップ線路のみのモデルを計算する必要がある。進行波のみの状態を求め、その結果を用いて、アンテナ解析モデルの波を進行波と反射波に分離し、それによりアンテナ特性を計算する。

図 4.19 に、マイクロストリップ線路給電型マイクロストリップアンテナの解析モデル図を示す。マイクロストリップ線路の励振方法として、図 4.19 の励振面において、ストリップ導体直下の E_z 成分のみをガウス型パルスで均一に励振する。励振面の近傍における電磁界分布は、実際にストリップ線路を伝搬するパルスの電磁界分布とは多少異なるが、観測点を励振面から少し離れた位置にすれば、マイクロストリップ線路のドミナント伝搬モードに対応した安定な真の電磁界分布が得られる。

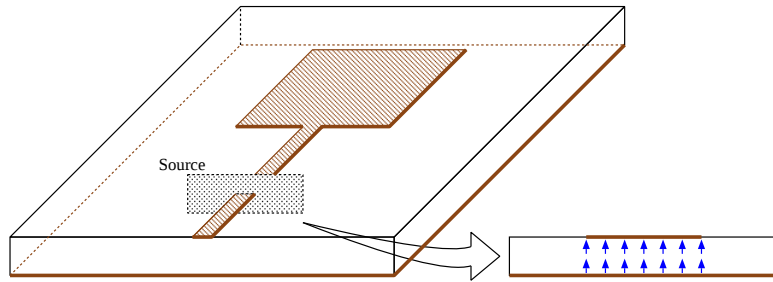


図 4.19: マイクロストリップ線路給電型マイクロストリップアンテナの励振

進行波と反射波を分離するため、図 4.20 に示すような、アンテナモデルと給電線のモデルを計算する。アンテナモデルの計算では、観測面において進行波と反射波の合成の計算結果を得る。給電線のモデルの端は PML 領域に挿入しているため、線路は無限長となり進行波のみと等価の計算結果を得る。この結果より進行波 V_t と反射波 V_r を分離し、その比より反射係数を求めることができる。実際の計算では、まずアンテナモデルを計算し、観測面における電圧と電流を求める。このときの電圧 V_a と電流 I_a は、それぞれ進行波と反射波の和 $V_t + V_r$ と $I_t + I_r$ となる。次に、給電線のモデルを計算する。このときの電圧と電流は、それぞれ進行波のみ

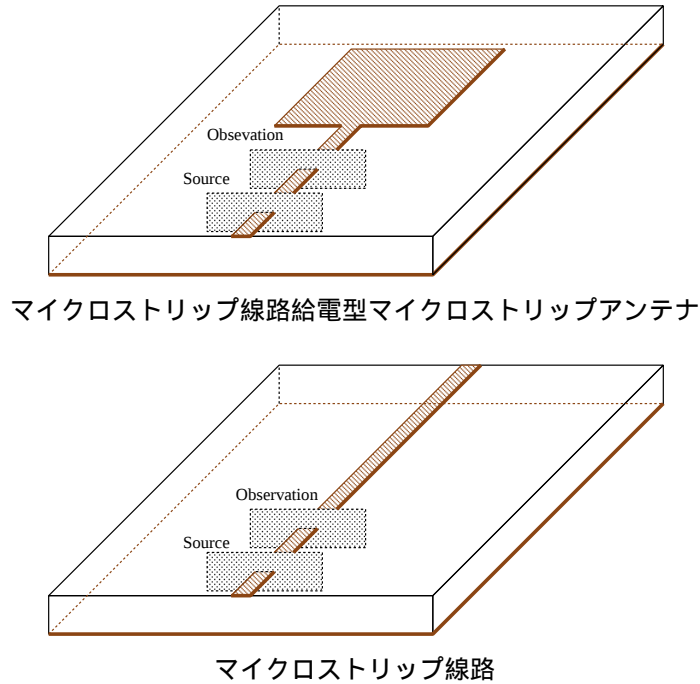


図 4.20: マイクロストリップ線路給電型マイクロストリップアンテナのインピーダンスの計算

の V_t と I_t となる。よって、反射係数 $\Gamma_{pf-msa}(S_{11})$ は、

$$\Gamma_{lf-msa}(\omega) = \frac{\mathcal{F}[V_a] - \mathcal{F}[V_t]}{\mathcal{F}[V_t]} \quad (4.84)$$

より求まる。

なお、FDTD 法では、マイクロストリップ線路上の電圧と電流はそれぞれ、電界と磁界を次式のように積分して求める。

$$V = - \int_{C_v} E \cdot d\ell \quad (4.85a)$$

$$I = \oint_{C_i} H \cdot d\ell \quad (4.85b)$$

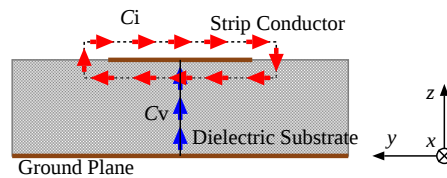


図 4.21: マイクロストリップ線路の電圧と電流の計算方法

図 4.21 は、マイクロストリップ線路の場合について、式 (4.85) の中の積分経路 C_v と C_i を示す。実際に FDTD 法では、電界と磁界は離散化した Yee メッシュ上に存在するので、積分も積分経路 C_v と C_i 上で各成分の和を求めることになる。

4.7.4 有限接地板と無限接地板

有限接地板のマイクロストリップアンテナと無限接地板のアンテナとでは、境界条件や領域の設定が異なる。

有限接地板を有するマイクロストリップアンテナ

有限接地板のマイクロストリップアンテナの場合は、特別な設定の必要はない。図 4.22 に示すように解析領域の外枠より L_P 層に PML 吸収境界領域を、さらに L_F セル内側に遠方界解析のための図 4.7 に示した仮想ボックスを設定する。さらに内側に、これらの領域や仮想ボックスに重ならないように、解析領域のほぼ中心にアンテナを配置する。

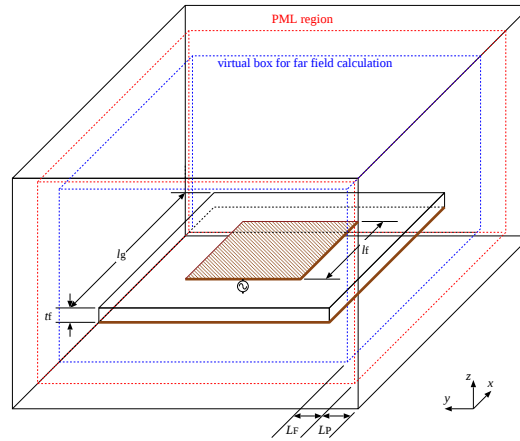


図 4.22: 有限接地板を有するマイクロストリップアンテナの解析

無限接地板を有するマイクロストリップアンテナ

無限接地板のマイクロストリップアンテナを解析する場合は、図 4.23 に示すように接地板あるいは誘電体基板を PML 領域を通過し解析領域の外枠面に接するように設定する必要がある。この場合、PML 領域に誘電体基板が挿入されることになり、その領域では無反射条件は式 (2.30) に代って

$$\frac{\sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} = \frac{\sigma^*}{\mu_0} \quad (4.86)$$

を満足することになる。このとき ε_r は、誘電体基板の比誘電率である。すなわち、PML 内の電界の計算式の ε_0 に ε_r を掛けることで、誘電体基板が挿入された PML 領域を計算することができる。また、接地板が遠方界計算のための仮想ボックスとも重なるため、特別な処理が必要になる。接地板が無限であるため、接地板より後方の電磁界の伝搬は無い。そのため、仮想ボックスをアンテナの基板の上に設定し、アンテナの上面と側面の5面で構成することになる。

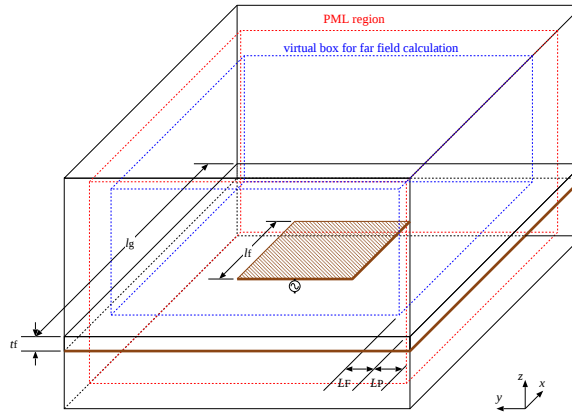


図 4.23: 無限接地板を有するマイクロストリップアンテナの解析

4.7.5 対称形状のマイクロストリップアンテナの解析

対称形状のマイクロストリップアンテナのモデル化

ここでは、図 4.24 に示すような、給電点を含む x - z 平面 ($y = s \Delta y$) を対称面とするマイクロストリップアンテナの解析について示す。対称面を完全磁壁とすることで、解析領域が $i_{\max} \times s (= j_{\max}/2) \times k_{\max}$ となる。

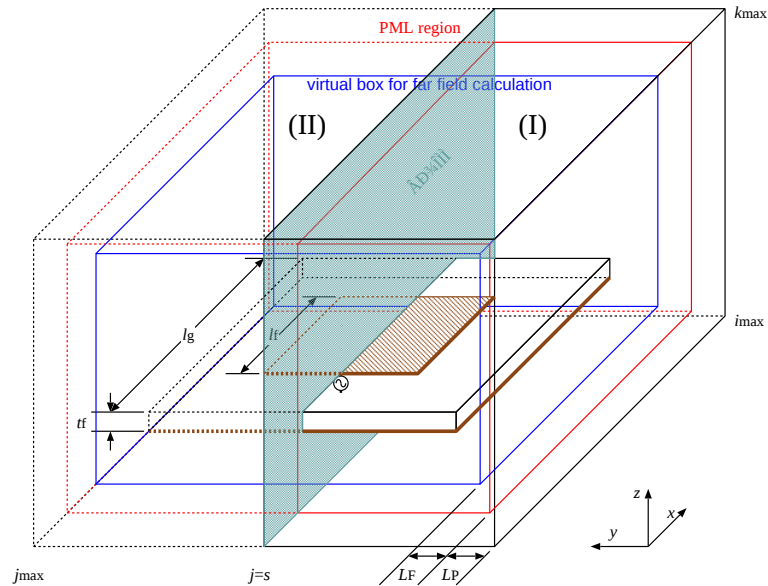


図 4.24: 対称形状のマイクロストリップアンテナの解析

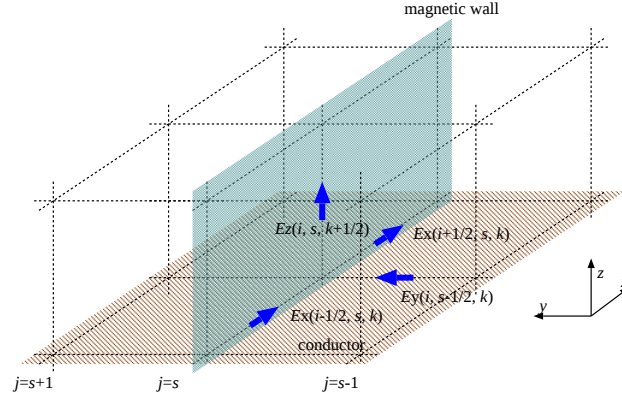
まず、給電素子や接地板などの導体の磁壁周辺のモデル化について示す。図 4.25(a) に磁壁周辺の電界の様子を示す。通常モデルの同様に、磁壁面内でも導体接する電界成分を 0 とすることで、給電素子や接地板をモデル化できる。

次に、誘電体の磁壁周辺のモデル化について示す。基本的に、4.7.1 項と同じ手法でモデル化する。図 4.25(a) に磁壁周辺の電磁界の様子を示す。 $j < s$ の範囲では通常の誘電体のモデル化と同じであるが、磁壁面内の電界は式 (1.84)、(1.85) の誘電率 ε に、4.7.1 項で示したように、求める電界に隣接する 4 つのセルの誘電率の平

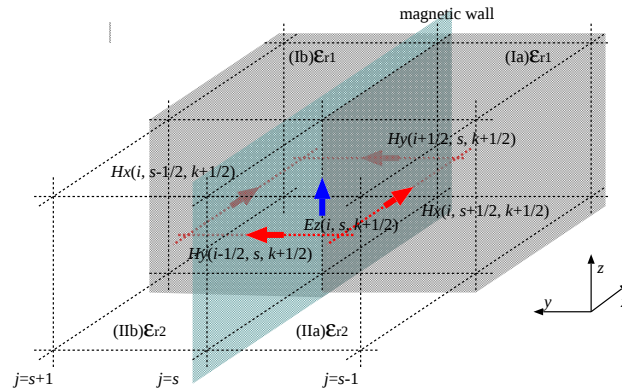
均値を代入することで求めることができる。例えば、 $E_z(i, s, k + \frac{1}{2})$ を求める場合、アンテナが対称構造なので、セル (Ia) の誘電率 ε_{r1} とセル (IIa) の誘電率 ε_{r2} の平均値

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \frac{\varepsilon_{r1} + \varepsilon_{r2}}{2} \quad (4.87)$$

を誘電率として計算する。



(a) 導体のモデル化



(b) 誘電体のモデル化

図 4.25: 対称形状のマイクロストリップアンテナのモデル化

対称形状のマイクロストリップアンテナの励振と入力インピーダンス

給電点が、対称面以外の領域 ($j_f < s$) にある場合は、通常のアプローチで計算できる。アンテナは式 (4.79) で励振し、式 (4.80) と式 (4.81) のフーリエ変換より式 (4.82) で求められる。しかし、給電点が、図 4.26 に示すように対称面にある場合は、アンテナの励振手法は同じであるが、入力インピーダンスの計算は異なる。給電ギャップの電圧は、式 (4.80) で求まるが、電流は $H_x(i_f, s + \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2})$ が計算領域外の位置にあるため、式 (1.83) を用いることによって求まり、式 (4.81) は

$$\begin{aligned}
 I \left(\left(n + \frac{1}{2} \right) \Delta t \right) &= \left\{ 2H_x^{n+\frac{1}{2}} \left(i_f, j_f - \frac{1}{2}, k_f + \frac{1}{2} \right) \right\} \Delta x \\
 &+ \left\{ H_y^{n+\frac{1}{2}} \left(i_f + \frac{1}{2}, j_f, k_f + \frac{1}{2} \right) - H_y^{n+\frac{1}{2}} \left(i_f - \frac{1}{2}, j_f, k_f + \frac{1}{2} \right) \right\} \Delta y
 \end{aligned}$$

(4.88)

となる。電圧と電流のフーリエ変換より式 (4.82) でアンテナの入力インピーダンスが求められる。

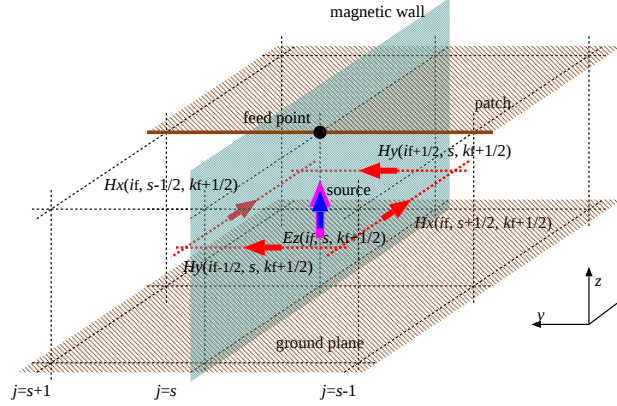


図 4.26: 対称形状のマイクロストリップアンテナの励振と入力インピーダンス

対称形状のマイクロストリップアンテナの遠方界

解析領域が半分 ($y \leq s\Delta y$) で、 $y > s\Delta y$ の領域の電磁界は計算されないため、 $y > s\Delta y$ の仮想ボックス面の等価電流・磁流の値が求められず、このままでは遠方界を計算することができない。そこで、界の対称性を利用し、 $y > s\Delta y$ の領域内の仮想ボックス面の等価電流・磁流の値を次式より求め、遠方界を計算する。

$$\begin{aligned}
 E_x(i + \frac{1}{2}, j, k) &= -E_x(i + \frac{1}{2}, j_{\max} - j + 1, k) \\
 E_y(i, j + \frac{1}{2}, k) &= E_y(i, j_{\max} - j + \frac{1}{2}, k) \\
 E_z(i, j, k + \frac{1}{2}) &= E_z(i, j_{\max} - j + 1, k + \frac{1}{2}) \\
 H_x(i, j + \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}) &= H_x(i, j_{\max} - j + \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}) \\
 H_y(i + \frac{1}{2}, j, k + \frac{1}{2}) &= -H_y(i + \frac{1}{2}, j_{\max} - j + 1, k + \frac{1}{2}) \\
 H_z(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}, k) &= -H_z(i + \frac{1}{2}, j_{\max} - j + \frac{1}{2}, k)
 \end{aligned} \tag{4.89}$$

4.8 マイクロストリップアンテナの解析例

上述の FDTD 法によるプローブ給電型のマイクロストリップアンテナの解析例を以下に示す。図 4.27 にプローブ給電型のマイクロストリップアンテナの解析モデルを示す。接地板は一辺の長さが $l_g=24.48\text{mm}$ 、給電素子は一辺の長さが $l_f=12.24\text{mm}$ の正方形としている。給電素子は、誘電体基板 (比誘電率 $\epsilon_r=2.15$ 、 $t_f=0.8\text{mm}$) に形成している。

空間離散間隔は $\Delta x=\Delta y=0.612\text{mm}$ 、 $\Delta z=0.4\text{mm}$ で、解析領域は $80\Delta x \times 80\Delta y \times 140\Delta z$ である。離散時間間隔 Δt は安定条件を満たすように、 $\Delta t=0.97978\text{ps}$ としている。給電素子と接地板の大きさ及び基板厚さは、セル数でそれぞれ、 $l_f = 20\Delta x = 20\Delta y$ 、 $l_g = 40\Delta x = 40\Delta y$ 、 $t_f=2\Delta z$ である。吸収境界面からアンテナ側面と下面までの距離を 10 セルとし、アンテナ前面に電波が強く放射されるので吸収境界からアンテナ前面まで

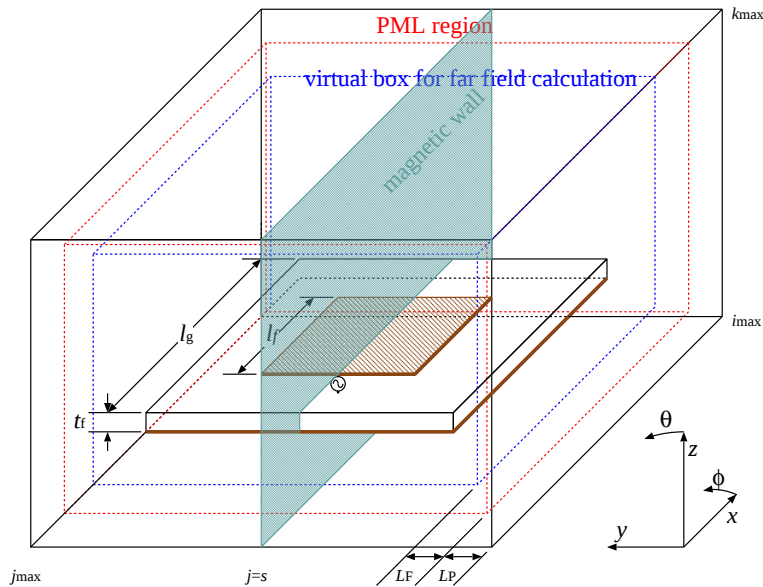


図 4.27: マイクロストリップアンテナの解析例

の距離を 110 セルと他より長くしている。給電素子の端にデルタギャップ給電し、励振波源には、式 (1.79) で表されるガウシアンパルスと CW 波の積で表される励振波を選び、中心周波数 7.5GHz、3dB 帯域幅 1GHz、励振電流振幅を 1mA としている (式 (4.79))。周波数分解能を 10MHz とすると、式 (3.45) より時間ステップ数 $N = 102062$ まで計算する必要がある。吸収境界条件には、10 層 ($L_P = 10$)、4 次の Berenger の PML 吸収境界条件を用いている。吸収境界面より 5 セル内側 ($L_F = 5$) に仮想面を設定して、その表面上の電磁界より仮想電流密度・磁流密度を求め、遠方界へ変換している。このモデルは、給電点を含む $y = s\Delta y$ の x - z 面で対称な構造なので、前節 4.7.5 項で示した手法を用い、計算時間の短縮を図っている。ここでは、アンテナの入力インピーダンスと指向性パターン、さらにアンテナ近傍の電磁界分布を計算している。入力インピーダンスと指向性パターンは実験値と比較している。計算モデルでは、誘電体基板の導体の厚みを 0、誘電体損失角 $\tan \delta$ も 0 とし、アンテナは無損失として計算している。実験モデルでは、導体の厚みと $\tan \delta$ はそれぞれ公称 0.018mm、0.001(12GHz) である。

図 4.28 に、励振源 (Source) と給電ギャップの電圧 (Voltage) の時間領域の変化の様子を示す。ギャップの電圧を観測し、振幅が最大値の $1/10,000$ 以下になる時点まで収束完了ステップ N_c と見なしている。このモデルでは、約 10000 ステップ (実時間 $\Delta t \times 10,000 = 10\text{ns}$) で収束している。次に、10MHz の周波数分解能を得るために、式 (3.46) に従ってさらに時間ステップ $N=102,062$ まで計算している。

図 4.29 と 4.30 に、入力インピーダンスの周波数特性と放射パターンをそれぞれ示す。入力インピーダンスは式 (4.82)、放射パターンは式 (4.30) と (4.28) より求めている。アンテナの入力インピーダンスの FDTD 法による計算値と実験値には、その計算モデルと実験モデルには給電部の構造に相違があり、これによって、主に入力インピーダンスの位相に差が生じる。そこで本論文では、入力インピーダンスの実験値の位相の校正をおこなっている (4.7.3 節)。入力インピーダンスと指向性は実験値と良く一致し、FDTD 法がマイクロストリップアンテナの解析に有用であることを示している。

図 4.31、図 4.32 および図 4.33 に、アンテナの給電素子の電流分布、接地板の上のセルの電界 E_z の振幅分布と磁界 H_y の振幅分布をそれぞれ示す。時間領域の電界と磁界の値をフーリエ変換して求めている。電流分布は、給電素子の上面と下面の磁界より式 (4.43) より求めている。電流分布の矢印は起点の電界の強さと向きを示している。解析したマイクロストリップアンテナが基本モードの TM_{10} で励振し、縁端効果により電磁界

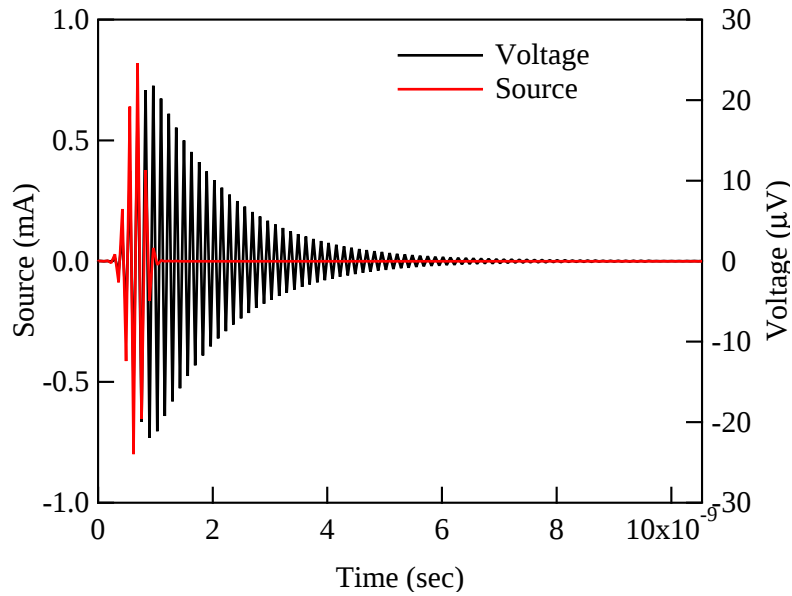
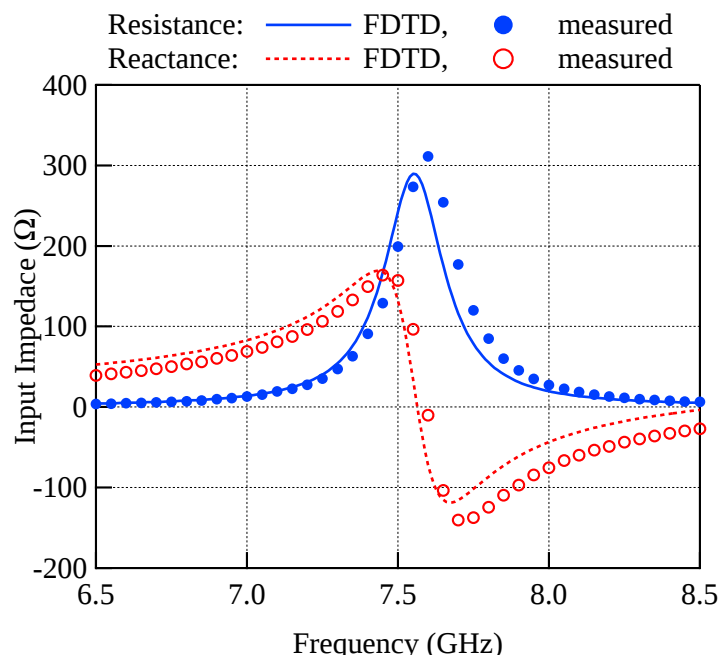


図 4.28: マイクロストリップアンテナの解析例

図 4.29: 入力インピーダンスの周波数特性 ($l_g=24.48\text{mm}$, $l_f=12.24\text{mm}$, $t_f=0.8\text{mm}$)

が集中しているのが分かる。

図 4.34 に、図 4.27 に示す給電点を含む x - z 平面 (対称面) 内の電界 E_x 成分分布を示す。振幅を最大値で規格化し、給電点の位相を 0 度として表している。給電素子の縁端で電界が強く、素子から遠ざかるに従い振幅が小さくなり、位相が遅れており、波が伝搬していく様子が見える。

図 4.35 に給電点を含む x - z 平面内の電界 E_x 成分と E_z 成分を合成した電界ベクトル分布を示す。矢印は起

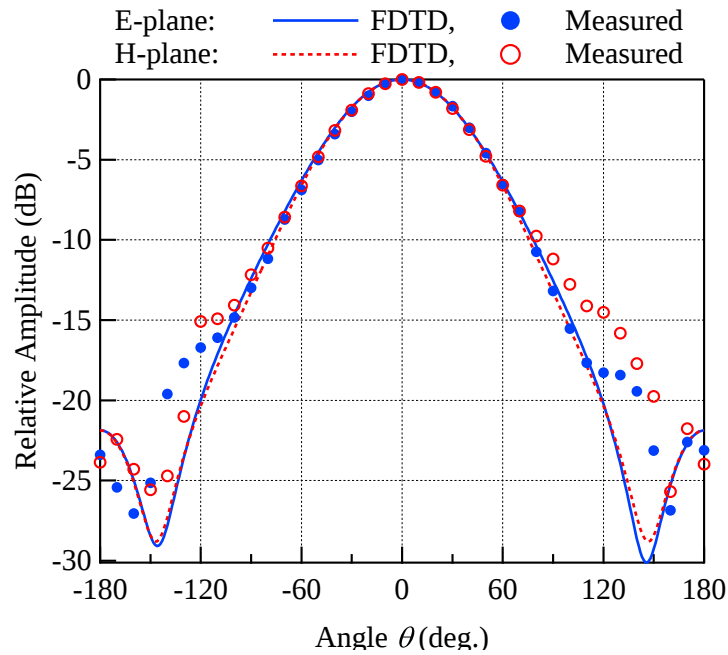


図 4.30: 放射パターン (Frequency=7.5GHz, $l_g=24.48\text{mm}$, $l_f=12.24\text{mm}$, $t_f=0.8\text{mm}$)

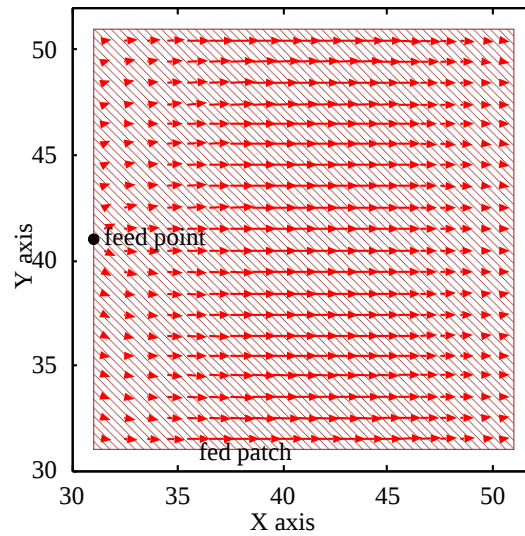


図 4.31: 給電素子の電流分布 (Frequency=7.5GHz, $l_g=24.48\text{mm}$, $l_f=12.24\text{mm}$, $t_f=0.8\text{mm}$)

点の電界の強さと向きを示している。解析したマイクロストリップアンテナが基本モードの TM_{10} で励振していることや、給電素子上部の電界の振舞を確認することができる。

図 4.32、4.33、4.34 および 4.35 に示すように、FDTD 法で求めたアンテナ近傍の電磁界分布や電流電圧分布は、マイクロストリップアンテナの基本動作と比較して矛盾する点はなく、計算結果の信頼性を確認できる。

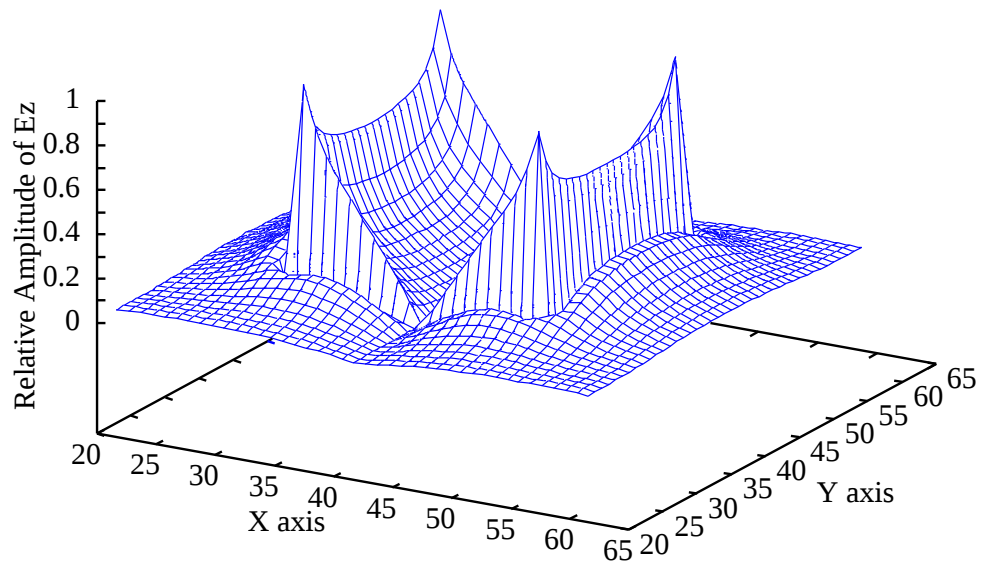


図 4.32: 電界 E_z 分布 (Frequency=7.5GHz, $l_g=24.48\text{mm}$, $l_f=12.24\text{mm}$, $t_f=0.8\text{mm}$)

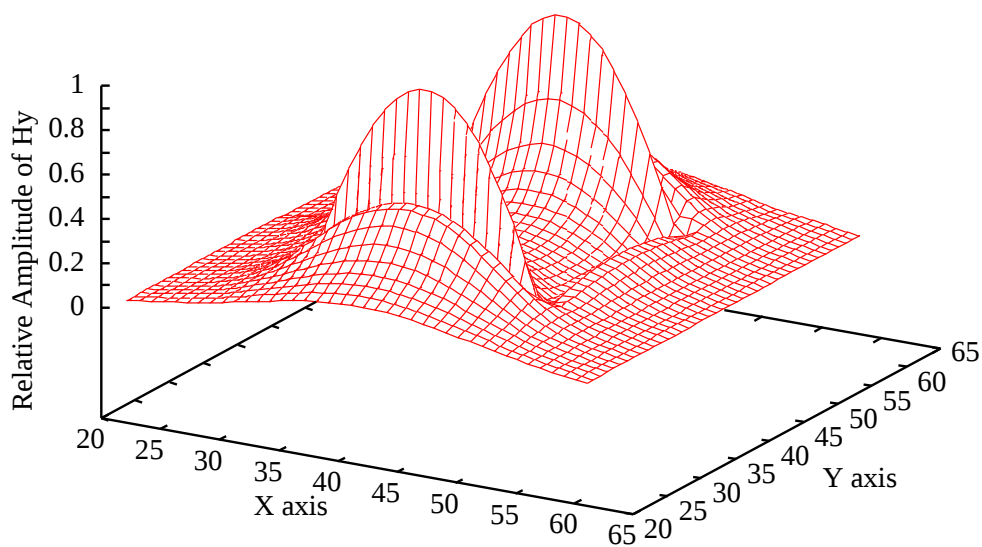
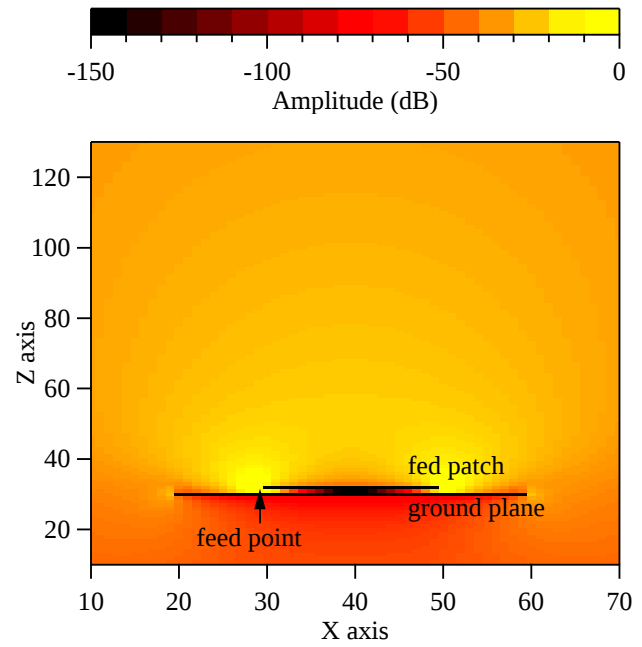
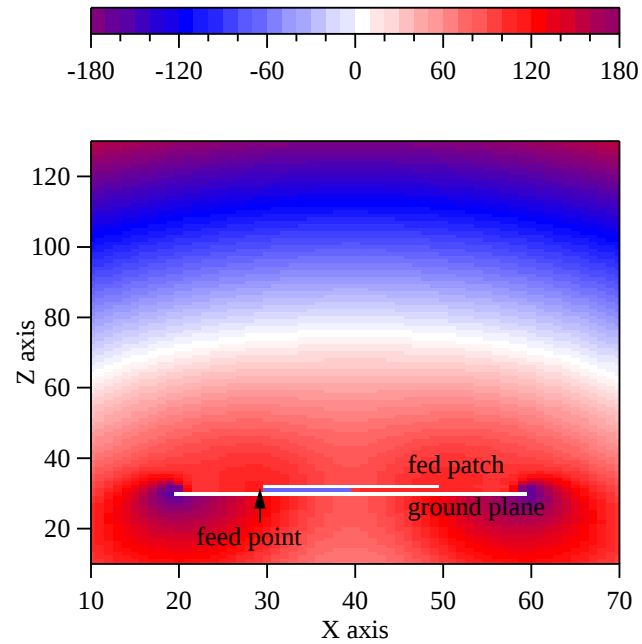


図 4.33: 磁界 H_y 分布 (Frequency=7.5GHz, $l_g=24.48\text{mm}$, $l_f=12.24\text{mm}$, $t_f=0.8\text{mm}$)



(a) amplitude



(a) phase

図 4.34: 電界分布 (Frequency=7.5GHz, $l_g=24.48\text{mm}$, $l_f=12.24\text{mm}$, $t_f=0.8\text{mm}$)

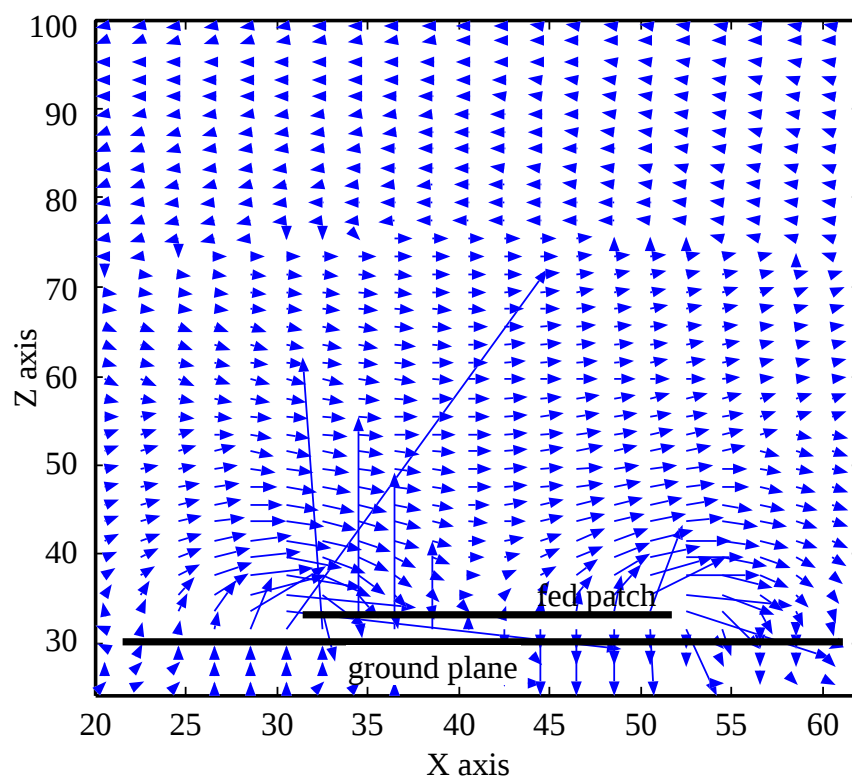


図 4.35: 電界 E_x - E_z ベクトル分布電流分布 (Frequency=7.5GHz, $l_g=24.48\text{mm}$, $l_f=12.24\text{mm}$, $t_f=0.8\text{mm}$)

★ MEMO ★

参考文献

- [1] K.S.Yee, "Numerical solution of initial boundary value problems involving Maxwell's equations in isotropic media," *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol. AP-14, pp. 302-307, Aug. 1966.
- [2] A.Taflove, "Application of the Finite-Difference Time-Domain method to sinusoidal steady-state electromagnetic penetration problems," *IEEE Trans. on EMC*, vol. 22, pp. 191-202, 1980.
- [3] J.P.Berenger, "A Perfectly Matched Layer for the absorption of electromagnetic waves," *J. Computational Physics*, vol. 114, pp. 185-200, 1994.
- [4] 羽石 操, 平沢 一紘, 鈴木 康夫, "小形・平面アンテナ," 電子情報通信学会, 1996
- [5] A.Reineix and B.Jecko, "Analysis of microstrip patch antennas using finite difference time domain method," *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol. AP-37, pp. 1361-1369. Nov. 1989.
- [6] D.M.Sheen,S.M.Ali,M.D.Abouzahra and A. Kong, "Application of the three-dimensional finite-difference time-domain method to the analysis of planar microstrip circuits," *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, vol. MTT-38, pp. 849-857. July 1990.
- [7] 山下 栄吉, 銭 永喜, "FDTD 法によるマイクロ波平面回路・アンテナ特性の解析," リアライズ社, 1996
- [8] R.Luebbers, L.Chen, T.Uno and S.Adachi, "FDTD Calculation of Radiation Patterns, Impedance and Gain for Monopole Antenna on a Conducting Box," *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol. AP-40, pp. 1577-1583, Dec 1992.
- [9] 橋本 修, 阿部 琢美, "FDTD 時間領域差分法入門," 森北出版社, 1996.
- [10] 宇野 亨, "FDTD 法による電磁界およびアンテナ解析," コロナ社, 1998.
- [11] J.Huang, "The finite ground plane effect on the microstrip antenna radiation patterns," *IEEE Trans. Antennas Propag.*, vol. AP-31, pp. 649-653, July 1983.

★ MEMO ★

付 録 A デルタ関数

ディラック (Dirac) のデルタ関数は、無限大の振幅と無限小のパルス幅をもち、

1. $t \neq t_0$ の値に対して $\delta(t_0 - t) = 0$

2. $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t_0 - t) dt = 1$

で定義される。

2 番目の条件は、パルスは $t = t_0$ の近傍に存在し面積が 1 であることを意味している。なお、図 A.1 に示すように、デルタ関数を振幅 A 、パルス幅 τ で、 $A\tau = 1$ を満たす有限な方形パルス $r(t)$ の極限と考えることができる。

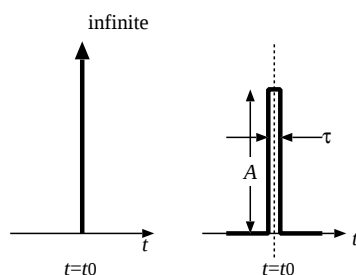


図 A.1: ディラックのデルタ関数

また、任意の関数 $f(t)$ についてデルタ関数は

$$f(t_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t_0 - t) f(t) dt \quad (\text{A.1})$$

を満足する。

また、クロネッカー (Kronecker) のデルタ関数は

$$\delta(t_0 - t) = \begin{cases} 1 & (t = t_0) \\ 0 & (t \neq t_0) \end{cases} \quad (\text{A.2})$$

で定義される。